Script generated by TTT

Title: Nipkow: Theo (15.04.2020)

Date: Wed Apr 15 21:47:40 CEST 2020

Duration: 91:13 min

Pages: 141

Einführung in die Theoretische Informatik

Tobias Nipkow

Fakultät für Informatik
TU München

Sommersemester 2020

Inhalt und Gliederung der Vorlesung

Inhalt und Gliederung der Vorlesung

- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Grundlagen der Textanalyse, der lexikalischen Analyse von Programmiersprachen, der Spezifikation und Analyse von Kommunikationsprotokollen, ...
- Kontextfreie Grammatiken

Inhalt und Gliederung der Vorlesung

- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Grundlagen der Textanalyse, der lexikalischen Analyse von Programmiersprachen, der Spezifikation und Analyse von Kommunikationsprotokollen, ...
- Kontextfreie Grammatiken
  - Grundlagen der syntaktische Analyse von Programmiersprachen, Parsing, Compilerbau

Inhalt und Gliederung der Vorlesung

- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Grundlagen der Textanalyse, der lexikalischen Analyse von Programmiersprachen, der Spezifikation und Analyse von Kommunikationsprotokollen, ...
- Kontextfreie Grammatiken
  - Grundlagen der syntaktische Analyse von Programmiersprachen, Parsing, Compilerbau
- Theorie der Berechenbarkeit
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können.

Inhalt und Gliederung der Vorlesung

- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Grundlagen der Textanalyse, der lexikalischen Analyse von Programmiersprachen, der Spezifikation und Analyse von Kommunikationsprotokollen, ...
- Kontextfreie Grammatiken
  - Grundlagen der syntaktische Analyse von Programmiersprachen, Parsing, Compilerbau
- Theorie der Berechenbarkeit
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können.
- Komplexitätstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner mit begrenzten Ressourcen können.

Inhalt und Gliederung der Vorlesung

- Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Grundlagen der Textanalyse, der lexikalischen Analyse von Programmiersprachen, der Spezifikation und Analyse von Kommunikationsprotokollen, ...
- Kontextfreie Grammatiken
  - Grundlagen der syntaktische Analyse von Programmiersprachen, Parsing, Compilerbau
- Theorie der Berechenbarkeit
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können.
- Komplexitätstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner mit begrenzten Ressourcen können.

Universalwerkzeuge der Informatik

Wichtige abstrakte Ziele

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:
zB nicht-deterministische durch deterministische Maschinen

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:
zB nicht-deterministische durch deterministische Maschinen

Äquivalenz von Formalismen:

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:
zB nicht-deterministische durch deterministische Maschinen

Äquivalenz von Formalismen:
zB endliche Automaten und reguläre Ausdrücke.

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:
zB nicht-deterministische durch deterministische Maschinen

Äquivalenz von Formalismen:
zB endliche Automaten und reguläre Ausdrücke.

Reduktion von einem Problem auf ein anderes:

Wichtige abstrakte Ziele

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:
zB nicht-deterministische durch deterministische Maschinen

Äquivalenz von Formalismen:
zB endliche Automaten und reguläre Ausdrücke.

Reduktion von einem Problem auf ein anderes:
zB Formeln auf Automaten, ...

Geschichte:

1936 Berechenbarkeitstheorie: Church & Turing

Geschichte:

1936 Berechenbarkeitstheorie: Church & Turing

1956 Automaten und reguläre Ausdrücke: Kleene

Geschichte:

1936 Berechenbarkeitstheorie: Church & Turing

1956 Automaten und reguläre Ausdrücke: Kleene

1956 Grammatiken: Chomsky

Vorkenntnisse und weiterführende Vorlesungen

- Vorkenntnisse:
  - Einführung in die Informatik 1
  - Diskrete Strukturen

Vorkenntnisse und weiterführende Vorlesungen

- Vorkenntnisse:
  - Einführung in die Informatik 1
  - Diskrete Strukturen
- Weiterführende Vorlesungen:
  - Automata und Formal Languages
  - Complexity Theory
  - Logic
  - Model Checking
  - Quantitative Verification
  - Compiler Construction
  - ...

Literatur


John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.
Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.


Dexter Kozen.
Automata and Computability.


Michael Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.


Katrin Erk, Lutz Priese.
Theoretische Informatik: Eine umfassende Einführung.


Uwe Schöning.
Theoretische Informatik — kurzgefasst.

Teil 1
Formale Sprachen

1. Historischer Hintergrund

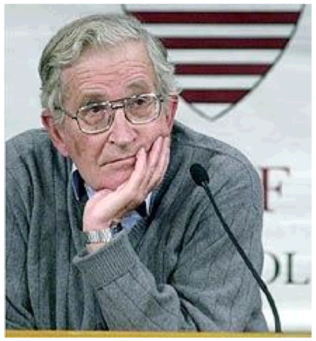
Die Geburt formaler Grammatiken:


Noam Chomsky.
Three Models for the Description of Language. Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.

1. Historischer Hintergrund

Die Geburt formaler Grammatiken:

Noam Chomsky.
Three Models for the Description of Language. Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.



Noam Chomsky (1928) war (bis 2017) Professor für Linguistik am MIT und ein bedeutender Sprachwissenschaftler. Neben seiner linguistischen Arbeit gilt Chomsky als einer der bedeutendsten Intellektuellen Nordamerikas und ist als scharfer Kritiker der US-amerikanischen Außenpolitik bekannt.
[Quelle: Wikipedia]

- Beispiele von Regeln für den Bau von Sätzen:

$$\begin{aligned} \text{Satz} &\rightarrow \text{Nominalphrase Verbalphrase} \\ \text{Verbalphrase} &\rightarrow \text{Verb Nominalphrase} \\ \text{Nominalphrase} &\rightarrow \text{Artikel Nomen} \end{aligned}$$

- Beispiele von Regeln für den Bau von Sätzen:

$$\begin{aligned} \text{Satz} &\rightarrow \text{Nominalphrase Verbalphrase} \\ \text{Verbalphrase} &\rightarrow \text{Verb Nominalphrase} \\ \text{Nominalphrase} &\rightarrow \text{Artikel Nomen} \end{aligned}$$

- Beispiele von Regeln für den Bau von mathematischen Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{Expression} &\rightarrow \text{Identifier} \\ \text{Expression} &\rightarrow \text{Expression} + \text{Expression} \\ \text{Expression} &\rightarrow \text{Expression} * \text{Expression} \\ \text{Identifier} &\rightarrow a \end{aligned}$$

- Das Wortproblem: Kann eine gegebene Zeichenkette ("Wort") von den Regeln einer Grammatik erzeugt werden, d.h. ist es eine legale Zeichenkette bzgl. der Grammatik?

- Das Wortproblem: Kann eine gegebene Zeichenkette ("Wort") von den Regeln einer Grammatik erzeugt werden, d.h. ist es eine legale Zeichenkette bzgl. der Grammatik?

  Beispiel: Expression kann $a + a$ erzeugen

- Das Wortproblem: Kann eine gegebene Zeichenkette ("Wort") von den Regeln einer Grammatik erzeugt werden, d.h. ist es eine legale Zeichenkette bzgl. der Grammatik?

  Beispiel: Expression kann $a + a$ erzeugen aber nicht aa

- Das Wortproblem: Kann eine gegebene Zeichenkette ("Wort") von den Regeln einer Grammatik erzeugt werden, d.h. ist es eine legale Zeichenkette bzgl. der Grammatik?

- Das Wortproblem: Kann eine gegebene Zeichenkette ("Wort") von den Regeln einer Grammatik erzeugt werden, d.h. ist es eine legale Zeichenkette bzgl. der Grammatik?

  Beispiel: Expression kann $a + a$ erzeugen aber nicht aa
- Recognizer: Programm, welches das Wortproblem für eine gegebene Grammatik löst.
  Recognizer $\rightarrow$ Lexer/Parser $\rightarrow$ Compiler
- Hauptfragen:

- Das Wortproblem: Kann eine gegebene Zeichenkette ("Wort") von den Regeln einer Grammatik erzeugt werden, d.h. ist es eine legale Zeichenkette bzgl. der Grammatik?

  Beispiel: Expression kann $a + a$ erzeugen aber nicht aa
- Recognizer: Programm, welches das Wortproblem für eine gegebene Grammatik löst.
  Recognizer $\rightarrow$ Lexer/Parser $\rightarrow$ Compiler
- Hauptfragen:
  - Für welche Grammatiken gibt es effiziente Recognizer?
  - Gegeben eine Grammatik, wie kann ein Recognizer automatisch konstruiert werden?

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.

{a, b, c}

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.
- Das leere Wort (das einzige Wort der Länge 0) wird mit ϵ bezeichnet.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.
- Das leere Wort (das einzige Wort der Länge 0) wird mit ϵ bezeichnet.
- Sind u und v Wörter, so ist uv ihre Konkatenation.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.
- Das leere Wort (das einzige Wort der Länge 0) wird mit ϵ bezeichnet.
- Sind u und v Wörter, so ist uv ihre Konkatenation.
- Ist w ein Wort, so ist w^n definiert durch
  $w^0 = \epsilon$ und $w^{n+1} = ww^n$.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.
- Das leere Wort (das einzige Wort der Länge 0) wird mit ϵ bezeichnet.
- Sind u und v Wörter, so ist uv ihre Konkatenation.
- Ist w ein Wort, so ist w^n definiert durch
  $w^0 = \epsilon$ und $w^{n+1} = ww^n$. Bsp: $(ab)^3 = ababab$.

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.
- Das leere Wort (das einzige Wort der Länge 0) wird mit ϵ bezeichnet.
- Sind u und v Wörter, so ist uv ihre Konkatenation.
- Ist w ein Wort, so ist w^n definiert durch
  $w^0 = \epsilon$ und $w^{n+1} = ww^n$. Bsp: $(ab)^3 = ababab$.
- Σ^* ist die Menge aller Wörter über Σ.

Σ^* endlich gdw $\Sigma = \emptyset$ oder $\Sigma = \{\varepsilon\}$
$\Sigma^* = \{\varepsilon\}$ $\Sigma^* = \{\varepsilon\}$

2. Grundbegriffe

Definition 2.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- $|w|$ bezeichnet die Länge eines Wortes w.
- Das leere Wort (das einzige Wort der Länge 0) wird mit ϵ bezeichnet.
- Sind u und v Wörter, so ist uv ihre Konkatenation.
- Ist w ein Wort, so ist w^n definiert durch
  $w^0 = \epsilon$ und $w^{n+1} = ww^n$. Bsp: $(ab)^3 = ababab$.
- Σ^* ist die Menge aller Wörter über Σ.
- Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine (formale) Sprache.

Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)

Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache

Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache
- $L_1 = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_1 = \{a, b\})$

Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache
- $L_1 = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_1 = \{a, b\})$
- $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_2 = \{a, b\})$

Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache
- $L_1 = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_1 = \{a, b\})$
- $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_2 = \{a, b\})$
- $L_3 = \{\epsilon, 1, 100, 1001, 10000, \ldots\} =$
  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist eine binär kodierte Quadratzahl$\}$
  $(\Sigma_3 = \{0, 1\})$

Beispiel 2.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache
- $L_1 = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_1 = \{a, b\})$
- $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_2 = \{a, b\})$
- $L_3 = \{\epsilon, 1, 100, 1001, 10000, \ldots\} =$
  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist eine binär kodierte Quadratzahl$\}$
  $(\Sigma_3 = \{0, 1\})$
- $\emptyset$

12

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$

13

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$

  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  $= \{ab, ba\}\{ab, ba\}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$

  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$

$\emptyset^0 = \{\epsilon\}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$

  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} =$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$

  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$
  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
  Bsp: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\}$

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$
  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
  Bsp: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\} \neq \{0, 1\}^*$

00

13

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$
  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
  Bsp: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\} \neq \{0, 1\}^*$
- $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$

$A^+ = \{\varepsilon\}$ gdw $A = \{\varepsilon\}$

~~$A = \emptyset$~~

13

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$
  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
  Bsp: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\} \neq \{0, 1\}^*$
- $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$
  Bsp: $\Sigma^+ =$ Menge aller nicht-leeren Wörter über Σ

13

Definition 2.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in A\} = \underbrace{A \cdots A}_{n}$
  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \cdots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \ldots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
  Bsp: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\} \neq \{0, 1\}^*$
- $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$
  Bsp: $\Sigma^+ =$ Menge aller nicht-leeren Wörter über Σ

Achtung:

- Für alle A: $\epsilon \in A^*$

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$
$= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\}$

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C)\}
\end{aligned}
$$

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C)\}
\end{aligned}
$$

$$
= \{uv \mid (u \in A \wedge v \in B) \vee (u \in A \wedge v \in C)\}
$$

14

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C)\}
\end{aligned}
$$

$$
= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \vee u \in A \wedge v \in C\}
$$

$$
= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\} \cup \{uv \mid u \in A \wedge v \in C\}
$$

14

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C)\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \vee u \in A \wedge v \in C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\} \cup \{uv \mid u \in A \wedge v \in C\}
\end{aligned}
$$

$$
= AB \cup AC
$$

14

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C)\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \vee u \in A \wedge v \in C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\} \cup \{uv \mid u \in A \wedge v \in C\} \\
&= AB \cup AC
\end{aligned}
$$

Achtung: i.A. gilt $A(B \cap C) = AB \cap AC$ *nicht*.

Einige Rechenregeln:

Lemma 2.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 2.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Beweis: $A(B \cup C)$

$$
\begin{aligned}
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \cup C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge (v \in B \vee v \in C)\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B \vee u \in A \wedge v \in C\} \\
&= \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\} \cup \{uv \mid u \in A \wedge v \in C\} \\
&= AB \cup AC
\end{aligned}
$$

Achtung: i.A. gilt $A(B \cap C) = AB \cap AC$ *nicht*.

Lemma 2.6

$A^*A^* = A^*$

14

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

15

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),

Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),

Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,

$P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endlich Menge von Produktionen, und

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),

Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,

$P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endlich Menge von Produktionen, und

$S \in V$ ist das Startsymbol.

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),
- Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endlich Menge von Produktionen, und
- $S \in V$ ist das Startsymbol.

Konventionen:

- $A, B, C, \ldots$ sind Nichtterminale,

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),
- Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endlich Menge von Produktionen, und
- $S \in V$ ist das Startsymbol.

Konventionen:

- $A, B, C, \ldots$ sind Nichtterminale,
- $a, b, c, \ldots$ (und Sonderzeichen wie $+, *, \ldots$) sind Terminale,

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),
- Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endlich Menge von Produktionen, und
- $S \in V$ ist das Startsymbol.

Konventionen:

- $A, B, C, \ldots$ sind Nichtterminale,
- $a, b, c, \ldots$ (und Sonderzeichen wie $+, *, \ldots$) sind Terminale,
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen schreiben wir $\alpha \to \beta$ statt $(\alpha, \beta) \in P$.

2.1 Grammatiken

Definition 2.7

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- V ist eine endliche Menge von Nichtterminalzeichen (oder Nichtterminalen, oder Variablen),
- Σ ist eine endliche Menge von Terminalzeichen (oder Terminalen), disjunkt von V, auch genannt ein Alphabet,
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)^*$ ist eine endlich Menge von Produktionen, und
- $S \in V$ ist das Startsymbol.

Konventionen:

- $A, B, C, \ldots$ sind Nichtterminale,
- $a, b, c, \ldots$ (und Sonderzeichen wie $+, *, \ldots$) sind Terminale,
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen schreiben wir $\alpha \to \beta$ statt $(\alpha, \beta) \in P$.
- Statt $\alpha \to \beta_1, \ldots, \alpha \to \beta_n$ schreiben wir $\alpha \to \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_n$

Beispiel 2.8 (Arithmetische Ausdrücke)

Beispiel 2.8 (Arithmetische Ausdrücke)

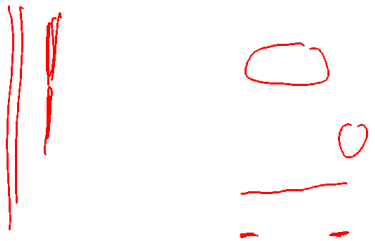
- $V = \{\langle\text{Expr}\rangle, \langle\text{Term}\rangle, \langle\text{Faktor}\rangle\}$

Beispiel 2.8 (Arithmetische Ausdrücke)

- $V = \{\langle\text{Expr}\rangle, \langle\text{Term}\rangle, \langle\text{Faktor}\rangle\}$
- $\Sigma = \{a, b, c, +, *, (,)\}$

Beispiel 2.8 (Arithmetische Ausdrücke)

- $V = \{\langle\text{Expr}\rangle, \langle\text{Term}\rangle, \langle\text{Faktor}\rangle\}$
- $\Sigma = \{a, b, c, +, *, (,)\}$
- $S = \langle\text{Expr}\rangle$



Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \alpha'$$

Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \alpha'$$

gdw es eine Regel $\beta \rightarrow \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \alpha'$$

gdw es eine Regel $\beta \rightarrow \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \alpha'$$

gdw es eine Regel $\beta \rightarrow \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Beispiel : Für die Grammatik der arithmetischen Ausdrücken gilt

$$a + \langle\text{Term}\rangle + b \quad \rightarrow_G \quad a + \langle\text{Term}\rangle * \langle\text{Factor}\rangle + b$$

Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\to_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \to_G \alpha'$$

gdw es eine Regel $\beta \to \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Beispiel : Für die Grammatik der arithmetischen Ausdrücken gilt

$$a + \langle \text{Term} \rangle + b \quad \to_G \quad a + \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle + b$$

Eine Sequenz $\alpha_1 \to_G \cdots \to_G \alpha_n$ ist eine Ableitung von α_n aus α_1.

Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\to_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \to_G \alpha'$$

gdw es eine Regel $\beta \to \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Beispiel : Für die Grammatik der arithmetischen Ausdrücken gilt

$$a + \langle \text{Term} \rangle + b \quad \to_G \quad a + \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle + b$$

Eine Sequenz $\alpha_1 \to_G \cdots \to_G \alpha_n$ ist eine Ableitung von α_n aus α_1.

Wenn $\alpha_1 = S$ und $\alpha_n \in \Sigma^*$, dann erzeugt G das Wort α_n.

Definition 2.9

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\to_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \to_G \alpha'$$

gdw es eine Regel $\beta \to \beta'$ in P und Wörter α_1, α_2 gibt, so dass

$$\alpha = \alpha_1 \beta \alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha' = \alpha_1 \beta' \alpha_2$$

Beispiel : Für die Grammatik der arithmetischen Ausdrücken gilt

$$a + \langle \text{Term} \rangle + b \quad \to_G \quad a + \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle + b$$

Eine Sequenz $\alpha_1 \to_G \cdots \to_G \alpha_n$ ist eine Ableitung von α_n aus α_1.

Wenn $\alpha_1 = S$ und $\alpha_n \in \Sigma^*$, dann erzeugt G das Wort α_n.

Die Sprache von G ist die Menge aller Wörter, die von G erzeugt werden. Sie wird mit $L(G)$ bezeichnet.

Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$\begin{array}{rcl}
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & a \mid b \mid c \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & (\langle \text{Expr} \rangle)
\end{array}$$

Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & a \mid b \mid c \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & (\langle \text{Expr} \rangle)
\end{array}
$$

Das Startsymbol ist $\langle \text{Expr} \rangle$.

Eine Ableitung:

$\langle \text{Expr} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle$

$\to a * (b + c)$

Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & a \mid b \mid c \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & (\langle \text{Expr} \rangle)
\end{array}
$$

Das Startsymbol ist $\langle \text{Expr} \rangle$.

Eine Ableitung:

$\langle \text{Expr} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle$

$\to a * (b + c)$

Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & a \mid b \mid c \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & (\langle \text{Expr} \rangle)
\end{array}
$$

Das Startsymbol ist $\langle \text{Expr} \rangle$.

Eine Ableitung:

$\langle \text{Expr} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle$

$\to a * (b + c)$

Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & a \mid b \mid c \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & (\langle \text{Expr} \rangle)
\end{array}
$$

Das Startsymbol ist $\langle \text{Expr} \rangle$.

Eine Ableitung:

$\langle \text{Expr} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle$
$\to \langle \text{Factor} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \to a * \langle \text{Factor} \rangle$

$\to a * (b + c)$

Beispiel 2.10 (Arithmetische Ausdrücke)

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Expr} \rangle & \to & \langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Term} \rangle & \to & \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & a \mid b \mid c \\
\langle \text{Factor} \rangle & \to & (\langle \text{Expr} \rangle)
\end{array}
$$

Das Startsymbol ist $\langle \text{Expr} \rangle$.

Eine Ableitung:

$$
\begin{aligned}
\langle \text{Expr} \rangle &\to \langle \text{Term} \rangle \to \langle \text{Term} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \\
&\to \langle \text{Factor} \rangle * \langle \text{Factor} \rangle \to a * \langle \text{Factor} \rangle \\
&\to a * (\langle \text{Expr} \rangle) \to a * (\langle \text{Expr} \rangle + \langle \text{Term} \rangle) \\
&\to a * (\langle \text{Term} \rangle + \langle \text{Term} \rangle) \to a * (\langle \text{Factor} \rangle + \langle \text{Term} \rangle) \\
&\to a * (b + \langle \text{Term} \rangle) \\
&\to a * (b + c)
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

$$
\begin{array}{lrcl}
G_1\colon & S & \to & abcS \mid \epsilon \\
 & ca & \to & ac \\
 & ba & \to & ab \\
 & cb & \to & bc
\end{array}
$$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

$$
\begin{array}{lrcl}
G_1\colon & S & \to & abcS \mid \epsilon \\
 & ca & \to & ac \\
 & ba & \to & ab \\
 & cb & \to & bc
\end{array}
$$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

$$
\begin{array}{lrcl}
G_1\colon & S & \to & abcS \mid \epsilon \\
 & ca & \to & ac \\
 & ba & \to & ab \\
 & cb & \to & bc
\end{array}
$$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

G_2: $S \to aBSc \mid \epsilon$
$Ba \to aB$
$Bb \to bb$
$Bc \to bc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

G_2: $S \to aBSc \mid \epsilon$
$Ba \to aB$
$Bb \to bb$
$Bc \to bc$

Es gilt: $L(G_2) = M$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

G_2: $S \to aBSc \mid \epsilon$
$Ba \to aB$
$Bb \to bb$
$Bc \to bc$

Es gilt: $L(G_2) = M$

Bsp: $S \to aBSc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$
$ca \to ac$
$ba \to ab$
$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$
Bsp:
$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

G_2: $S \to aBSc \mid \epsilon$
$Ba \to aB$
$Bb \to bb$
$Bc \to bc$

Es gilt: $L(G_2) = M$

Bsp: $S \to aBSc \to aBaBScc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$

$ca \to ac$

$ba \to ab$

$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil

$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$

Bsp:

$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

G_2: $S \to aBSc \mid \epsilon$

$Ba \to aB$

$Bb \to bb$

$Bc \to bc$

Es gilt: $L(G_2) = M$

Bsp: $S \to aBSc \to aBaBScc \to aBaBcc \to aaBBcc$

Beispiel 2.11

Zwei Grammatiken für $M = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$?

G_1: $S \to abcS \mid \epsilon$

$ca \to ac$

$ba \to ab$

$cb \to bc$

Es gilt $L(G_1) \neq M$ weil

$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc$

Aber $M \subseteq L(G_1)$

Bsp:

$S \to abcS \to abcabcS \to abcabc \to abacbc \to aabcbc \to aabbcc$

G_2: $S \to aBSc \mid \epsilon$

$Ba \to aB$

$Bb \to bb$

$Bc \to bc$

Es gilt: $L(G_2) = M$

Bsp: $S \to aBSc \to aBaBScc \to aBaBcc \to aaBBcc$

Definition 2.12 (Iteration von $\to_G$)

$$\alpha \to_G^0 \alpha$$

$$\alpha \to_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$$

Definition 2.12 (Iteration von $\to_G$)

$$\alpha \to_G^0 \alpha$$

$$\alpha \to_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$$

Reflexive transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Definition 2.12 (Iteration von $\to_G$)

$$\alpha \to_G^0 \alpha$$

$$\alpha \to_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$$

Reflexive transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^+ \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Definition 2.12 (Iteration von $\to_G$)

$$\alpha \to_G^0 \alpha$$

$$\alpha \to_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$$

Reflexive transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^+ \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Beispiel: $\langle \text{Expr} \rangle \to_G^{11} a * (b + c)$

Definition 2.12 (Iteration von $\to_G$)

$$\alpha \to_G^0 \alpha$$

$$\alpha \to_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$$

Reflexive transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^+ \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Beispiel: $\langle \text{Expr} \rangle \to_G^{11} a * (b + c)$ und somit $\langle \text{Expr} \rangle \to_G^* a * (b + c)$.

Definition 2.12 (Iteration von $\to_G$)

$$\alpha \to_G^0 \alpha$$

$$\alpha \to_G^{n+1} \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma$$

Reflexive transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^* \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Transitive Hülle:

$$\alpha \to_G^+ \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0.\ \alpha \to_G^n \beta$$

Beispiel: $\langle \text{Expr} \rangle \to_G^{11} a * (b + c)$ und somit $\langle \text{Expr} \rangle \to_G^* a * (b + c)$.

Nach Definition: $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \to_G^* w\}$

2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist vom

2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist vom

Typ 0 immer.

2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist vom

Typ 0 immer.

Typ 1 falls für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$

2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist vom

Typ 0 immer.

Typ 1 falls für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ gilt $\alpha \in V$.

2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist vom

- Typ 0 immer.
- Typ 1 falls für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$
- Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ gilt $\alpha \in V$.
- Typ 3 falls G vom Typ 2 ist und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$.

2.2 Die Chomsky-Hierarchie

Eine Grammatik G ist vom

- Typ 0 immer.
- Typ 1 falls für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $|\alpha| \leq |\beta|$
- Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ gilt $\alpha \in V$.
- Typ 3 falls G vom Typ 2 ist und für jede Produktion $\alpha \to \beta$ außer $S \to \epsilon$ gilt $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Offensichtlich gilt:

$$\text{Typ 3} \subset \text{Typ 2} \subset \text{Typ 1} \subset \text{Typ 0}$$

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik	Kontextsens. Sprachen

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik	Kontextsens. Sprachen
Typ 0	Phrasenstrukturgrammatik	Rekursiv aufzählbare Sprachen

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik	Kontextsens. Sprachen
Typ 0	Phrasenstrukturgrammatik	Rekursiv aufzählbare Sprachen

Satz 2.13

$L(\text{Typ } 3) \subset L(\text{Typ } 2) \subset L(\text{Typ } 1) \subset L(\text{Typ } 0)$

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik	Kontextsens. Sprachen
Typ 0	Phrasenstrukturgrammatik	Rekursiv aufzählbare Sprachen

Satz 2.13

$L(\text{Typ } 3) \subset L(\text{Typ } 2) \subset L(\text{Typ } 1) \subset L(\text{Typ } 0)$

Bemerkung Wir benutzen später eine etwas liberalere Definition von kontextfreien Grammatiken, die aber die gleiche Klasse von kontextfreien Sprachen erzeugt.

Grammatiken und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik	Reguläre Sprachen
Typ 2	Kontextfreie Grammatik	Kontextfreie Sprachen
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik	Kontextsens. Sprachen

Das Wortproblem:

Gegeben: eine Grammatik G, ein Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Gilt $w \in L(G)$?

In den kommenden Wochen untersuchen wir das Wortproblem für Grammatiken vom Typ 3 und Typ 2.

Das Wortproblem:

Gegeben: eine Grammatik G, ein Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Gilt $w \in L(G)$?

In den kommenden Wochen untersuchen wir das Wortproblem für Grammatiken vom Typ 3 und Typ 2.

Wir studieren Algorithmen, die für eine gegebene Grammatik G einen Automaten A_G konstruieren, und untersuchen ihre Laufzeit.

Das Wortproblem:

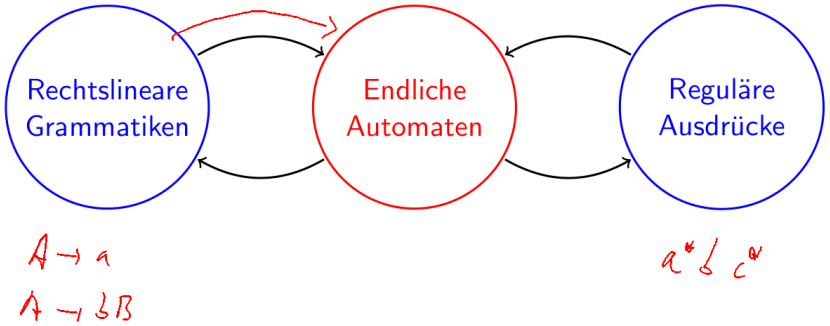
Gegeben: eine Grammatik G, ein Wort $w \in \Sigma^*$
Frage: Gilt $w \in L(G)$?

In den kommenden Wochen untersuchen wir das Wortproblem für Grammatiken vom Typ 3 und Typ 2.

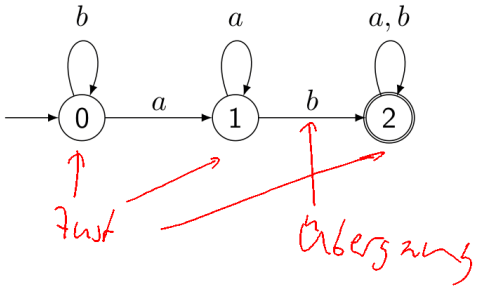
Wir studieren Algorithmen, die für eine gegebene Grammatik G einen Automaten A_G konstruieren, und untersuchen ihre Laufzeit.

A_G ist eine abstrakte Beschreibung eines Programms zur Lösung des Wortproblems.

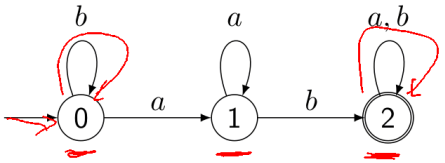
3. Reguläre Sprachen



3.1 Deterministische endliche Automaten

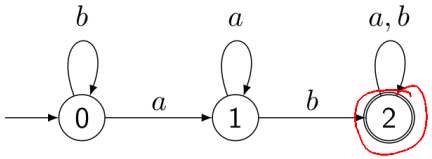


3.1 Deterministische endliche Automaten



Eingabewort $baba \rightsquigarrow$ Zustandsfolge 0,0,1,2,2.

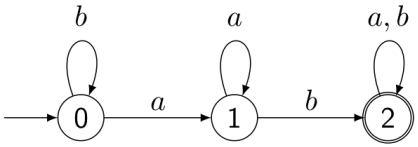
3.1 Deterministische endliche Automaten



Eingabewort $baba \rightsquigarrow$ Zustandsfolge 0,0,1,2,2.

Akzeptierte Sprache: Menge der Wörter, die vom Startzustand in einen Endzustand führen.

3.1 Deterministische endliche Automaten



Eingabewort $baba \rightsquigarrow$ Zustandsfolge 0,0,1,2,2.

Akzeptierte Sprache: Menge der Wörter, die vom Startzustand in einen Endzustand führen.

Recognizer, der nur einmal das Wort durchläuft und es in linearer Zeit akzeptiert oder ablehnt.

Definition 3.1
Ein deterministischer endlicher Automat (*deterministic finite automaton*, DFA) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ besteht aus