Script generated by TTT

Title: Seidl: Info2 (13.01.2017)

Date: Fri Jan 13 08:27:24 CET 2017

Duration: 92:46 min

Pages: 33

6.4 Funktoren

Da in Ocaml fast alles höherer Ordnung ist, wundert es nicht, dass es auch Strukturen höherer Ordung gibt: die Funktoren.

- Ein Funktor bekommt als Parameter eine Folge von Strukturen;
- der Rumpf eines Funktors ist eine Struktur, in der die Argumente des Funktors verwendet werden können;
- das Ergebnis ist eine neue Struktur, die abhängig von den Parametern definiert ist.

Wir legen zunächst per Signatur die Eingabe und Ausgabe des Funktors fest:

```
module type Decons = sig
  type 'a t
  val decons : 'a t -> ('a * 'a t) option
end
module type GenFold = functor (X:Decons) -> sig
  val fold_left : ('b -> 'a -> 'b) -> 'b -> 'a X.t -> 'b
  val fold_right : ('a -> 'b -> 'b) -> 'a X.t -> 'b -> 'b
  val size : 'a X.t -> int
  val list_of : 'a X.t -> 'a list
  val iter : ('a -> unit) -> 'a X.t -> unit
end
...
```


Wir legen zunächst per Signatur die Eingabe und Ausgabe des Funktors fest:

```
module type Decons = sig
  type 'a t
  val decons : 'a t -> ('a * 'a t) option
end
module type GenFold = functor (X:Decons) -> sig
  val fold_left : ('b -> 'a -> 'b) -> 'b -> 'a X.t -> 'b
  val fold_right : ('a -> 'b -> 'b) -> 'a X.t -> 'b -> 'b
  val size : 'a X.t -> int
  val list_of : 'a X.t -> 'a list
  val iter : ('a -> unit) -> 'a X.t -> unit
end
...
```

306

```
...
  module Fold : GenFold = functor (X:Decons) ->
  struct
  let rec fold_left f b t = match X.decons t
      with None -> b
      | Some (x,t) -> fold_left f (f b x) t
  let rec fold_right f t b = match X.decons t
      with None -> b
      | Some (x,t) -> f x (fold_right f t b)
  let size t = fold_left (fun a x -> a+1) 0 t
  let list_of t = fold_right (fun x xs -> x::xs) t []
  let iter f t = fold_left (fun () x -> f x) () t
  end;;
```

Jetzt können wir den Funktor auf eine Struktur anwenden und erhalten eine neue Struktur ...

Wir legen zunächst per Signatur die Eingabe und Ausgabe des Funktors fest:

```
  module type Decons = sig
    type 'a t
    val decons : 'a t -> ('a * 'a t) option
  end
  module type GenFold = functor (X:Decons) -> sig
    val fold_left : ('b -> 'a -> 'b) -> 'b -> 'a X.t -> 'b
    val fold_right : ('a -> 'b -> 'b) -> 'a X.t -> 'b -> 'b
    val size : 'a X.t -> int
    val list_of : 'a X.t -> 'a list
    val iter : ('a -> unit) -> 'a X.t -> unit
  end
...
```



```
...
  module Fold : GenFold = functor (X:Decons) ->
  struct
  let rec fold_left f b t = match X.decons t
      with None -> b
      | Some (x,t) -> fold_left f (f b x) t
  let rec fold_right f t b = match X.decons t
      with None -> b
      | Some (x,t) -> f x (fold_right f t b)
  let size t = fold_left (fun a x -> a+1) 0 t
  let list_of t = fold_right (fun x xs -> x::xs) t []
  let iter f t = fold_left (fun () x -> f x) () t
  end;;
```

Jetzt können wir den Funktor auf eine Struktur anwenden und erhalten eine neue Struktur ...


```
module MyQueue = struct open Queue
  type 'a t = 'a queue
  let decons = function
     Queue([],xs) -> (match rev xs
          with [] -> None
          | x::xs -> Some (x, Queue(xs,[])))
   | Queue(x::xs,t) -> Some (x, Queue(xs,t))
end

module MyAVL = struct open AVL
  type 'a t = 'a avl
  let decons avl = match extract_min avl
      with (None,avl) -> None
       | Some (a,avl) -> Some (a,avl)
end
```

```
module FoldAVL = Fold (MyAVL)
module FoldQueue = Fold (MyQueue)
```

Damit können wir z.B. definieren:

```
let sort list = FoldAVL.list_of (
                    AVL.from_list list)
```

Achtung

Ein Modul erfüllt eine Signatur, wenn er sie implementiert !

Es ist nicht nötig, das explizit zu deklarieren !!

6.5 Getrennte Übersetzung

- Eigentlich möchte man Ocaml-Programme nicht immer in der interaktiven Umgebung starten.
- Dazu gibt es u.a. den Compiler `ocamlc` ...

  ```
  > ocamlc Test.ml
  ```

  interpretiert den Inhalt der Datei `Test.ml` als Folge von Definitionen einer Struktur `Test`.
- Als Ergebnis der Übersetzung liefert `ocamlc` die Dateien:

`Test.cmo`	Bytecode für die Struktur
`Test.cmi`	Bytecode für das Interface
`a.out`	lauffähiges Programm

- Gibt es eine Datei `Test.mli` wird diese als Definition der Signatur für `Test` aufgefasst. Dann rufen wir auf:

  ```
  > ocamlc Test.mli Test.ml
  ```
- Benutzt eine Struktur `A` eine Struktur `B`, dann sollte diese mit übersetzt werden:

  ```
  > ocamlc B.mli B.ml A.mli A.ml
  ```
- Möchte man auf die Neuübersetzung von `B` verzichten, kann man `ocamlc` auch die vor-übersetzte Datei mitgeben:

  ```
  > ocamlc B.cmo A.mli A.ml
  ```
- Zur praktischen Verwaltung von benötigten Neuübersetzungen nach Änderungen von Dateien bietet Linux das Kommando `make` an. Das Protokoll der auszuführenden Aktionen steht dann in einer Datei `Makefile`.
- ... oder man benutzt gleich ocamlbuild.

7 Formale Methoden für Ocaml

Frage

Wie können wir uns versichern, dass ein Ocaml-Programm das macht, was es tun soll ???

Wir benötigen:

- eine formale Semantik;
- Techniken, um Aussagen über Programme zu beweisen ...

7.1 MiniOcaml

Um uns das Leben leicht zu machen, betrachten wir nur einen kleinen Ausschnitt aus Ocaml. Wir erlauben ...

- nur die Basistypen `int, bool` sowie Tupel und Listen;
- rekursive Funktionsdefinitionen nur auf dem Top-Level;

Wir verbieten ...

- veränderbare Datenstrukturen;
- Ein- und Ausgabe;
- lokale rekursive Funktionen;

Dieses Fragment von Ocaml nennen wir MiniOcaml.

Ausdrücke in MiniOcaml lassen sich durch die folgende Grammatik beschreiben:

$$
\begin{aligned}
E \;::=\; & \text{const} \mid \text{name} \mid \text{op}_1\, E \mid E_1\, \text{op}_2\, E_2 \mid \\
& (E_1, \ldots, E_k) \mid \texttt{let name} = E_1 \texttt{ in } E_0 \mid \\
& \texttt{match } E \texttt{ with } P_1 \texttt{ -> } E_1 \texttt{ | } \ldots \texttt{ | } P_k \texttt{ -> } E_k \mid \\
& \texttt{fun name -> } E \mid E\, E_1
\end{aligned}
$$

$$
P \;::=\; \text{const} \mid \text{name} \mid (P_1, \ldots, P_k) \mid P_1 :: P_2
$$

Dieses Fragment von Ocaml nennen wir MiniOcaml.

Ausdrücke in MiniOcaml lassen sich durch die folgende Grammatik beschreiben:

$$
\begin{aligned}
E \;::=\; & \text{const} \mid \text{name} \mid \text{op}_1\, E \mid E_1\, \text{op}_2\, E_2 \mid \\
& (E_1, \ldots, E_k) \mid \texttt{let name} = E_1 \texttt{ in } E_0 \mid \\
& \texttt{match } E \texttt{ with } P_1 \texttt{ -> } E_1 \texttt{ | } \ldots \texttt{ | } P_k \texttt{ -> } E_k \mid \\
& \texttt{fun name -> } E \mid E\, E_1
\end{aligned}
$$

$$
P \;::=\; \text{const} \mid \text{name} \mid (P_1, \ldots, P_k) \mid P_1 :: P_2
$$

Abkürzung

$$
\texttt{fun } x_1 \texttt{ -> } \ldots \texttt{fun } x_k \texttt{ -> } e \quad \equiv \quad \texttt{fun } x_1 \ldots x_k \texttt{ -> } e
$$

Dieses Fragment von Ocaml nennen wir MiniOcaml.

Ausdrücke in MiniOcaml lassen sich durch die folgende Grammatik beschreiben:

$$
\begin{aligned}
E \;::=\; & \text{const} \mid \text{name} \mid \text{op}_1\, E \mid E_1\, \text{op}_2\, E_2 \mid \\
& (E_1, \ldots, E_k) \mid \texttt{let name} = E_1 \texttt{ in } E_0 \mid \\
& \texttt{match } E \texttt{ with } P_1 \texttt{ -> } E_1 \texttt{ | } \ldots \texttt{ | } P_k \texttt{ -> } E_k \mid \\
& \texttt{fun name -> } E \mid E\, E_1
\end{aligned}
$$

$$
P \;::=\; \text{const} \mid \text{name} \mid (P_1, \ldots, P_k) \mid P_1 :: P_2
$$

Abkürzung

$$
\texttt{fun } x_1 \texttt{ -> } \ldots \texttt{fun } x_k \texttt{ -> } e \quad \equiv \quad \texttt{fun } x_1 \ldots x_k \texttt{ -> } e
$$

Achtung

- Die Menge der erlaubten Ausdrücke muss weiter eingeschränkt werden auf diejenigen, die typkorrekt sind, d.h. für die der Ocaml-Compiler einen Typ herleiten kann ...

  `(1, [true; false])` typkorrekt

  `(1 [true; false])` nicht typkorrekt

  `([1; true], false)` nicht typkorrekt

- Wir verzichten auf `if ... then ... else ...`, da diese durch `match ... with true -> ... | false -> ...` simuliert werden können.
- Wir hätten auch auf `let ... in ...` verzichten können (wie?)

Ein Programm besteht dann aus einer Folge wechselseitig rekursiver globaler Definitionen von Variablen $f_1, \ldots, f_m$:

```
let rec f1 = E1
and f2 = E2
    ...
and fm = Em
```

7.2 Eine Semantik für MiniOcaml

Frage

Zu welchem Wert wertet sich ein Ausdruck E aus ??

Ein Wert ist ein Ausdruck, der nicht weiter ausgerechnet werden kann.

Die Menge der Werte lässt sich ebenfalls mit einer Grammatik beschreiben:

$$V ::= \texttt{const} \mid \texttt{fun}\ \texttt{name}_1\ \ldots\ \texttt{name}_k\ \texttt{->}\ E \mid (V_1,\ldots,V_k) \mid [] \mid V_1 :: V_2$$

Ein MiniOcaml-Programm ...

```
let rec comp = fun f g x -> f (g x)
    and map  = fun f list -> match list
               with [] -> []
               | x::xs -> f x :: map f xs
```


Ein MiniOcaml-Programm ...

```
let rec comp = fun f g x -> f (g x)
    and map  = fun f list -> match list
               with [] -> []
               | x::xs -> f x :: map f xs
```

Beispiele für Werte ...

```
1
(1, [true; false])
fun x -> 1 + 1
[fun x -> x+1; fun x -> x+2; fun x -> x+3]
```


Idee

- Wir definieren eine Relation: $e \Rightarrow v$ zwischen Ausdrücken und ihren Werten $\Longrightarrow$ Big-Step operationelle Semantik.
- Diese Relation definieren wir mit Hilfe von Axiomen und Regeln, die sich an der Struktur von e orientieren.
- Offenbar gilt stets: $v \Rightarrow v$ für jeden Wert v.

Tupel

$$\frac{e_1 \Rightarrow v_1 \quad \ldots \quad e_k \Rightarrow v_k}{(e_1, \ldots, e_k) \Rightarrow (v_1, \ldots, v_k)}$$

Listen

$$\frac{e_1 \Rightarrow v_1 \quad e_2 \Rightarrow v_2}{e_1 :: e_2 \Rightarrow v_1 :: v_2}$$

Globale Definitionen

$$\frac{f = e \quad e \Rightarrow v}{f \Rightarrow v}$$

Lokale Definitionen

$$\frac{e_1 \Rightarrow v_1 \quad e_0[v_1/x] \Rightarrow v_0}{\texttt{let } x = e_1 \texttt{ in } e_0 \Rightarrow v_0}$$

Funktionsaufrufe

$$\frac{e \Rightarrow \texttt{fun } x \texttt{ -> } e_0 \quad e_1 \Rightarrow v_1 \quad e_0[v_1/x] \Rightarrow v_0}{e\ e_1 \Rightarrow v_0}$$

Lokale Definitionen

$$\frac{e_1 \Rightarrow v_1 \quad e_0[v_1/x] \Rightarrow v_0}{\texttt{let } x = e_1 \texttt{ in } e_0 \Rightarrow v_0}$$

Funktionsaufrufe

$$\frac{e \Rightarrow \texttt{fun } x \texttt{ -> } e_0 \quad e_1 \Rightarrow v_1 \quad e_0[v_1/x] \Rightarrow v_0}{e\ e_1 \Rightarrow v_0}$$

Durch mehrfache Anwendung der Regel für Funktionsaufrufe können wir zusätzlich eine Regel für Funktionen mit mehreren Argumenten ableiten:

$$\frac{e_0 \Rightarrow \texttt{fun } x_1 \ldots x_k \texttt{ -> } e \quad e_1 \Rightarrow v_1 \ \ldots \ e_k \Rightarrow v_k \quad e[v_1/x_1, \ldots, v_k/x_k] \Rightarrow v}{e_0\ e_1 \ \ldots \ e_k \Rightarrow v}$$

Diese abgeleitete Regel macht Beweise etwas weniger umständlich.

Durch mehrfache Anwendung der Regel für Funktionsaufrufe können wir zusätzlich eine Regel für Funktionen mit mehreren Argumenten ableiten:

$$\frac{e_0 \Rightarrow \texttt{fun}\ x_1 \ldots x_k \texttt{->} e \quad e_1 \Rightarrow v_1 \ \ldots \ e_k \Rightarrow v_k \quad e[v_1/x_1, \ldots, v_k/x_k] \Rightarrow v}{e_0\ e_1\ \ldots\ e_k \ \Rightarrow\ v}$$

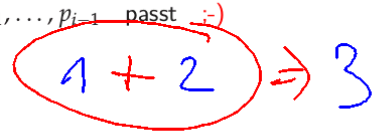
Diese abgeleitete Regel macht Beweise etwas weniger umständlich.

Pattern Matching

$$\frac{e_0 \Rightarrow v' \equiv p_i[v_1/x_1, \ldots, v_k/x_k] \qquad e_i[v_1/x_1, \ldots, v_k/x_k] \Rightarrow v}{\texttt{match}\ e_0\ \texttt{with}\ p_1\ \texttt{->}\ e_1\ \texttt{|}\ \ldots\ \texttt{|}\ p_m\ \texttt{->}\ e_m \ \Rightarrow\ v}$$

— sofern v' auf keines der Muster $p_1, \ldots, p_{i-1}$ passt ;-)

Eingebaute Operatoren



$$\frac{e_1 \Rightarrow v_1 \qquad e_2 \Rightarrow v_2 \qquad v_1\ \mathrm{op}\ v_2 \Rightarrow v}{e_1\ \mathrm{op}\ e_2 \ \Rightarrow\ v}$$

Die unären Operatoren behandeln wir analog.

Der eingebaute Gleichheits-Operator

$$v = v \ \Rightarrow\ \texttt{true}$$

$$v_1 = v_2 \ \Rightarrow\ \texttt{false}$$

sofern v, v_1, v_2 Werte sind, in denen keine Funktionen vorkommen, und v_1, v_2 syntaktisch verschieden sind.

Beispiel 1

$$\frac{\texttt{17+4} \Rightarrow \texttt{21} \qquad \texttt{21} \Rightarrow \texttt{21} \qquad \texttt{21=21} \Rightarrow \texttt{true}}{\texttt{17 + 4 = 21} \Rightarrow \texttt{true}}$$

Pattern Matching

$$\frac{e_0 \Rightarrow v' \equiv p_i[v_1/x_1, \ldots, v_k/x_k] \qquad e_i[v_1/x_1, \ldots, v_k/x_k] \Rightarrow v}{\texttt{match}\ e_0\ \texttt{with}\ p_1\ \texttt{->}\ e_1\ \texttt{|}\ \ldots\ \texttt{|}\ p_m\ \texttt{->}\ e_m \ \Rightarrow\ v}$$

— sofern v' auf keines der Muster $p_1, \ldots, p_{i-1}$ passt ;-)

Eingebaute Operatoren

$$\frac{e_1 \Rightarrow v_1 \qquad e_2 \Rightarrow v_2 \qquad v_1\ \mathrm{op}\ v_2 \Rightarrow v}{e_1\ \mathrm{op}\ e_2 \ \Rightarrow\ v}$$

Die unären Operatoren behandeln wir analog.

Der eingebaute Gleichheits-Operator

$$v = v \quad \Rightarrow \quad \texttt{true}$$

$$v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \texttt{false}$$

sofern v, v_1, v_2 Werte sind, in denen keine Funktionen vorkommen, und v_1, v_2 syntaktisch verschieden sind.

Beispiel 1

$$\frac{\texttt{17+4} \Rightarrow \texttt{21} \qquad \texttt{21} \Rightarrow \texttt{21} \qquad \texttt{21=21} \Rightarrow \texttt{true}}{\texttt{17 + 4 = 21} \Rightarrow \texttt{true}}$$

Beispiel 2

```
let f = fun x -> x+1
and s = fun y -> y*y
```

$$\dfrac{\dfrac{\texttt{f = fun x -> x+1}}{\texttt{f} \Rightarrow \texttt{fun x -> x+1}} \qquad \texttt{16+1} \Rightarrow \texttt{17}}{\texttt{f 16} \Rightarrow \texttt{17}} \qquad \dfrac{\dfrac{\texttt{s = fun y -> y*y}}{\texttt{s} \Rightarrow \texttt{fun y -> y*y}} \qquad \texttt{2*2} \Rightarrow \texttt{4}}{\texttt{s 2} \Rightarrow \texttt{4}} \qquad \texttt{17+4} \Rightarrow \texttt{21}$$

$$\texttt{f 16 + s 2} \Rightarrow \texttt{21}$$

// Benutzungen von $v \Rightarrow v$ haben wir i.a. weggelassen