Script generated by TTT

Title: Seidl: GAD (15.06.2016)

Date: Wed Jun 15 13:22:10 CEST 2016

Duration: 44:25 min

Pages: 27

Kürzeste-Wege-Problem

gegeben:

- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- Kantenkosten $c : E \mapsto \mathbb{R}$

2 Varianten:

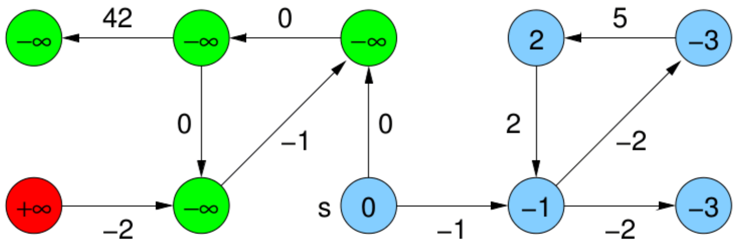
- SSSP (single source shortest paths):

  kürzeste Wege von einer Quelle zu allen anderen Knoten

- APSP (all pairs shortest paths):

  kürzeste Wege zwischen allen Paaren

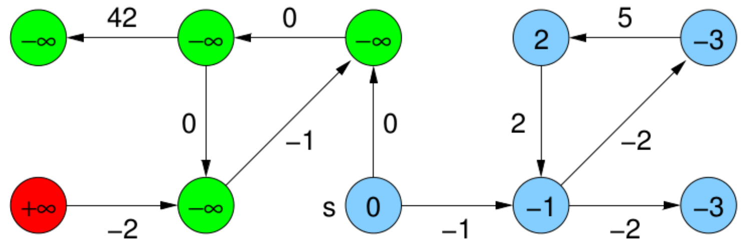
Distanzen



$\mu(s, v)$: Distanz von s nach v

$$\mu(s,v) = \begin{cases} +\infty & \text{kein Weg von } s \text{ nach } v \\ -\infty & \text{Weg beliebig kleiner Kosten von } s \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : p \text{ ist Weg von } s \text{ nach } v\} & \end{cases}$$

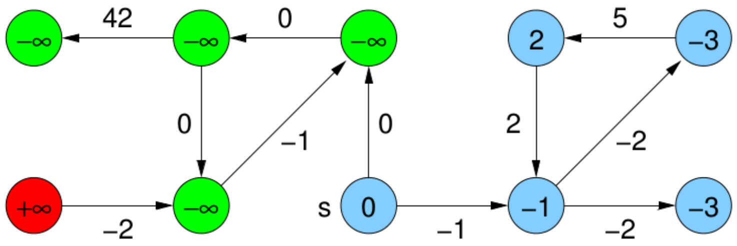
Distanzen



Wann sind die Kosten $-\infty$?

wenn es einen Kreis mit negativer Gewichtssumme gibt
(hinreichende und notwendige Bedingung)

Distanzen



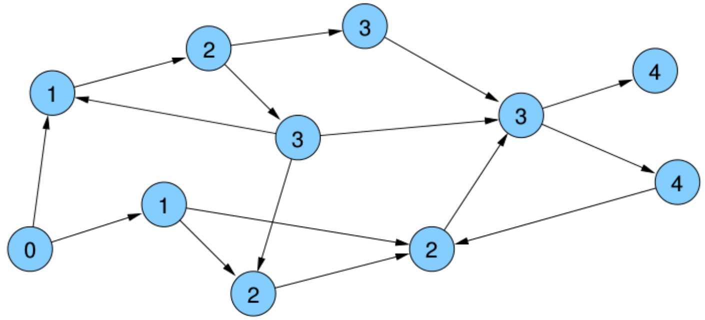
Wann sind die Kosten $-\infty$?

wenn es einen Kreis mit negativer Gewichtssumme gibt
(hinreichende und notwendige Bedingung)

Kürzeste Wege bei uniformen Kantenkosten

Graph mit Kantenkosten 1:

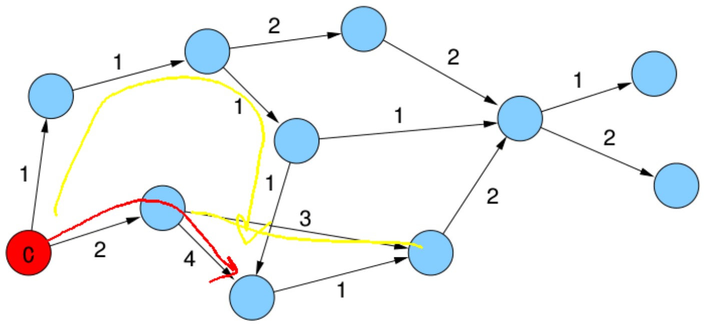
⇒ Breitensuche (BFS)



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

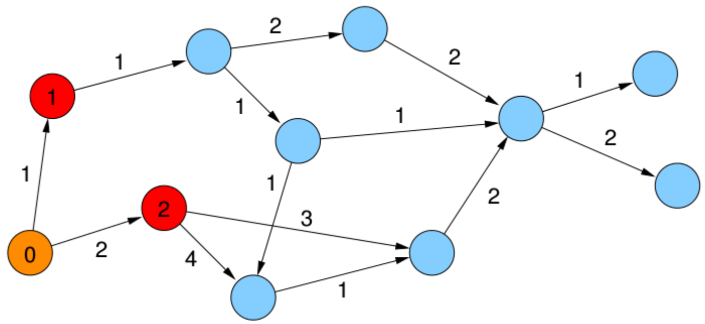
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

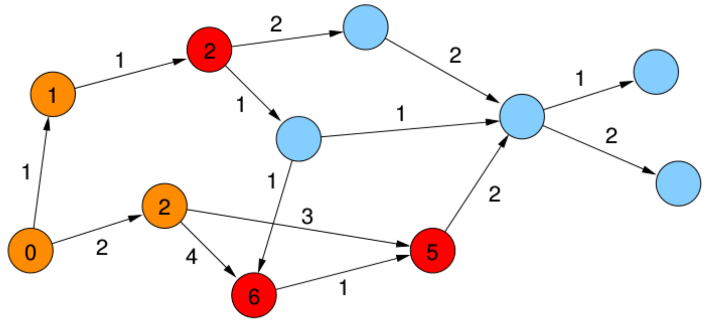
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

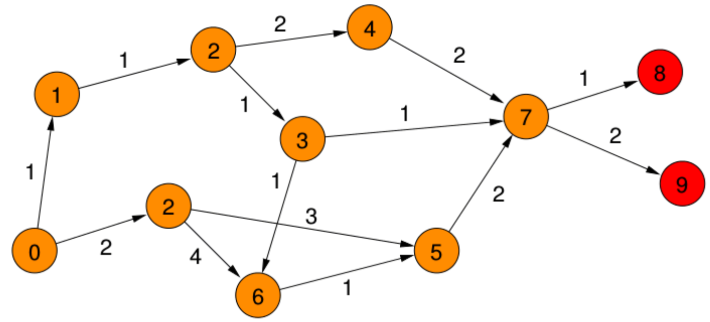
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Einfache Breitensuche funktioniert nicht.

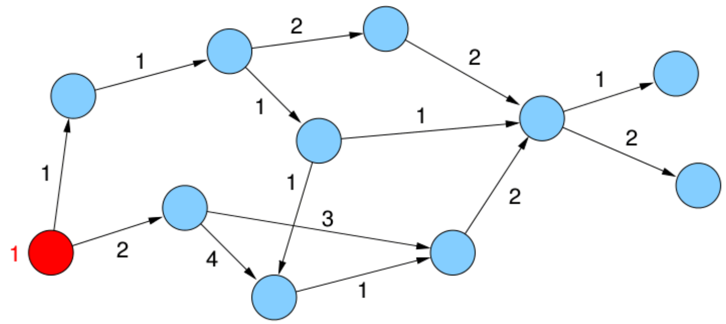


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))

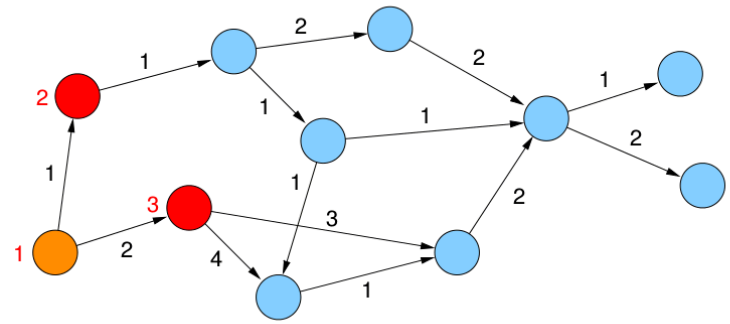


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))

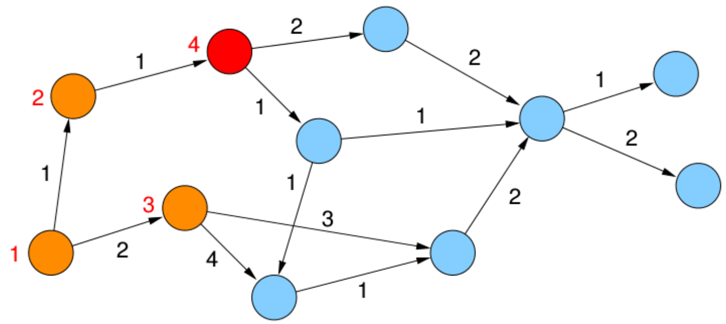


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))



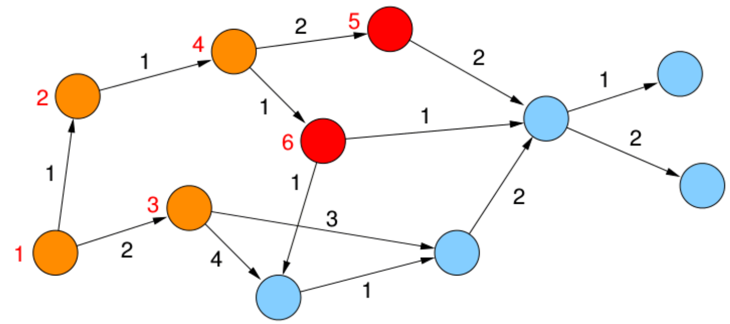
Graphen | Kürzeste Wege

Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))



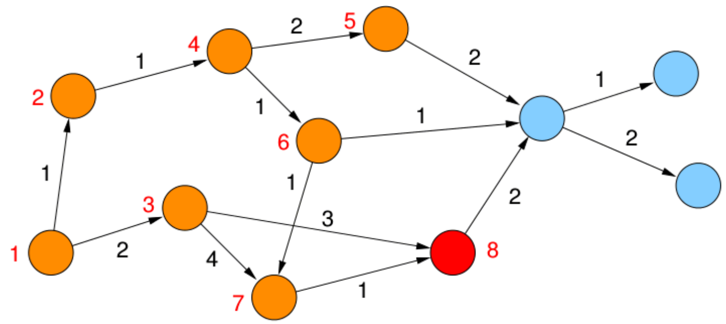
Graphen | Kürzeste Wege

Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))



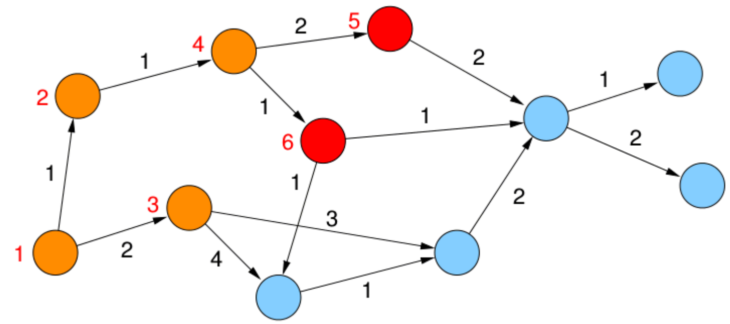
Graphen | Kürzeste Wege

Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))

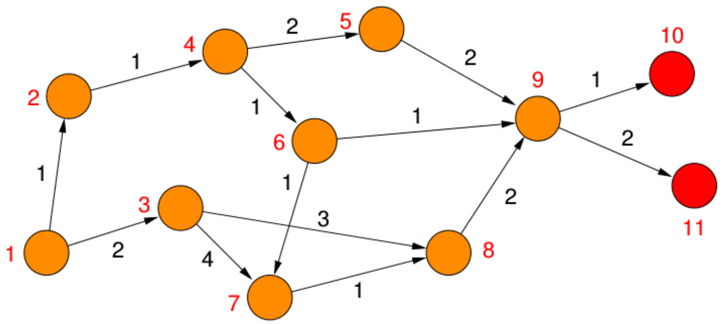


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))



Kürzeste Wege in DAGs

Topologische Sortierung

- verwende FIFO-Queue q
- verwalte für jeden Knoten einen Zähler für die noch nicht markierten eingehenden Kanten
- initialisiere q mit allen Knoten, die keine eingehende Kante haben (Quellen)
- nimm nächsten Knoten v aus q und markiere alle $(v, w) \in E$, d.h. dekrementiere Zähler für w
- falls der Zähler von w dabei Null wird, füge w in q ein
- wiederhole das, bis q leer wird

Kürzeste Wege in DAGs

Topologische Sortierung

Korrektheit

- Knoten wird erst dann nummeriert, wenn alle Vorgänger nummeriert sind

Laufzeit

- für die Anfangswerte der Zähler muss der Graph einmal traversiert werden $O(n + m)$
- danach wird jede Kante genau einmal betrachtet

$\Rightarrow$ gesamt: $O(n + m)$

Test auf DAG-Eigenschaft

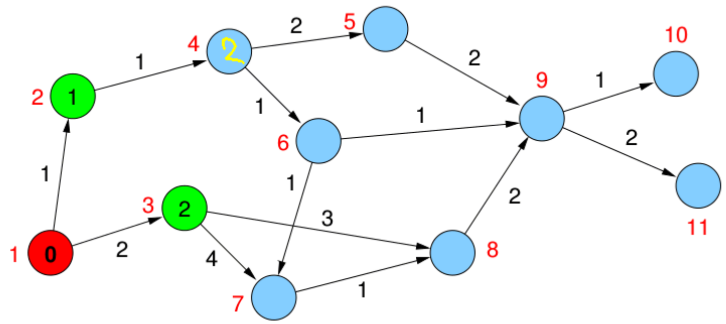
- topologische Sortierung erfasst genau dann alle Knoten, wenn der Graph ein DAG ist
- bei gerichteten Kreisen erhalten diese Knoten keine Nummer

Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

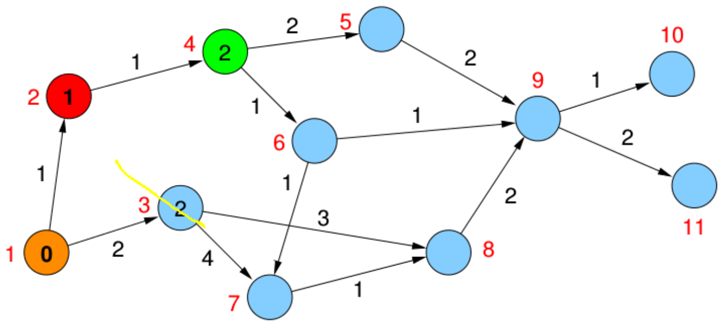


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

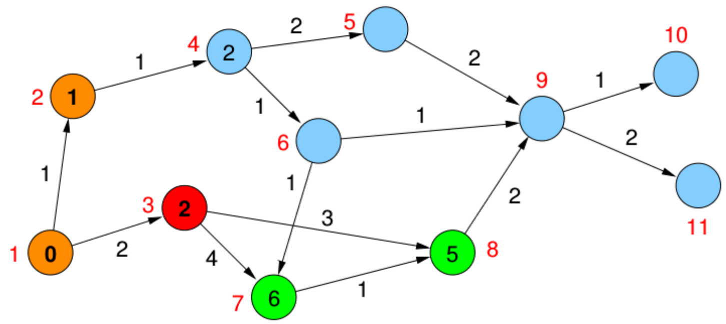


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

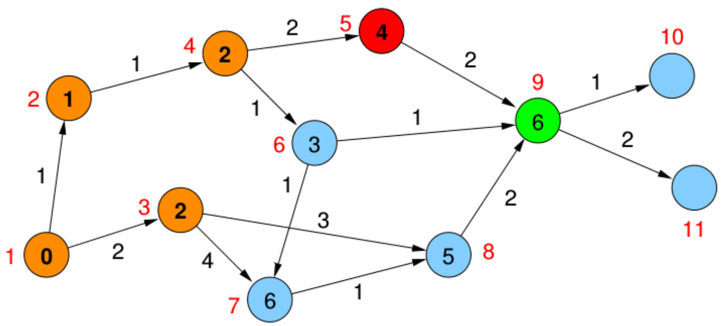


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

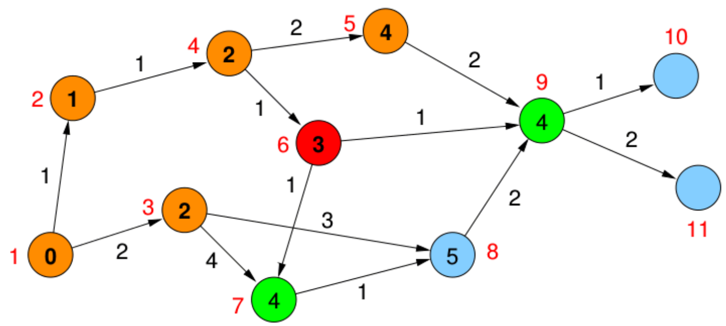


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Topologische Sortierung – warum funktioniert das?

- betrachte einen kürzesten Weg von s nach v
- der ganze Pfad beachtet die topologische Sortierung
- d.h., die Distanzen werden in der Reihenfolge der Knoten vom Anfang des Pfades zum Ende hin betrachtet
- damit ergibt sich für v der richtige Distanzwert

- ein Knoten x kann auch nie einen Wert erhalten, der echt kleiner als seine Distanz zu s ist
- die Kantenfolge von s zu x, die jeweils zu den Distanzwerten an den Knoten geführt hat, wäre dann ein kürzerer Pfad (Widerspruch)

Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Allgemeine Strategie:

- Anfang: setze $d(s) = 0$ und
  für alle anderen Knoten v setze $d(v) = \infty$
- besuche Knoten in einer Reihenfolge, die sicherstellt, dass mindestens ein kürzester Weg von s zu jedem v in der Reihenfolge seiner Knoten besucht wird
- für jeden besuchten Knoten v aktualisiere die Distanzen der Knoten w mit $(v, w) \in E$, d.h. setze

$$d(w) = \min\{\ d(w),\ d(v) + c(v, w)\ \}$$

Kürzeste Wege in DAGs

DAG-Strategie

1. Topologische Sortierung der Knoten

   Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

2. Aktualisierung der Distanzen gemäß der topologischen Sortierung

   Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n + m)$

Beliebige Graphen mit nicht-negativen Gewichten

Gegeben:

- beliebiger Graph
  (gerichtet oder ungerichtet, muss diesmal kein DAG sein)
- mit nicht-negativen Kantengewichten

$\Rightarrow$ keine Knoten mit Distanz $-\infty$

Problem:

- besuche Knoten eines kürzesten Weges in der richtigen Reihenfolge
- wie bei Breitensuche, jedoch diesmal auch mit Distanzen $\neq 1$

Lösung:

- besuche Knoten in der Reihenfolge der kürzesten Distanz zum Startknoten s