Script generated by TTT

Title: Seidl: GAD (07.06.2016)

Date: Tue Jun 07 14:21:59 CEST 2016

Duration: 89:53 min

Pages: 54

Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden

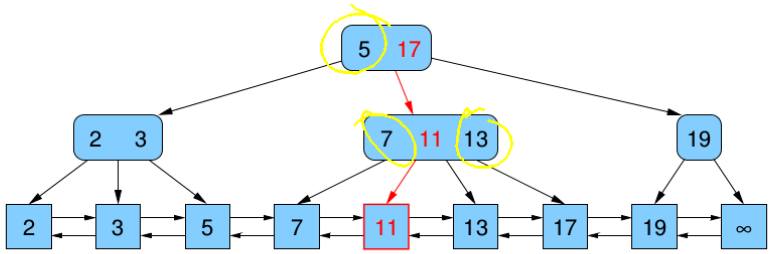
Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden
- betrachte Pfad von Wurzel zum Blatt y
- spalte auf diesem Pfad jeden Knoten v in zwei Knoten v_ℓ und v_r
- v_ℓ bekommt Kinder links vom Pfad,
  v_r bekommt Kinder rechts vom Pfad
  (evt. gibt es Knoten ohne Kinder)

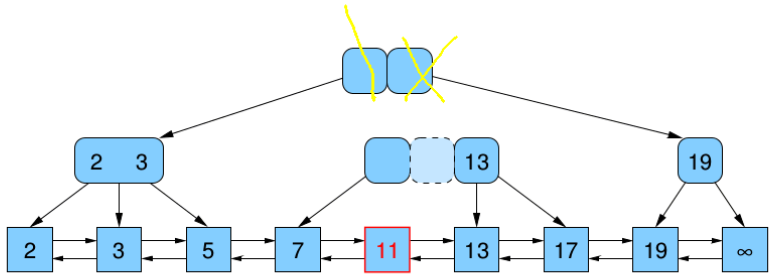
Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden
- betrachte Pfad von Wurzel zum Blatt y
- spalte auf diesem Pfad jeden Knoten v in zwei Knoten v_ℓ und v_r
- v_ℓ bekommt Kinder links vom Pfad,
  v_r bekommt Kinder rechts vom Pfad
  (evt. gibt es Knoten ohne Kinder)
- Knoten mit Kind(ern) werden als Wurzeln von (a, b)-Bäumen interpretiert
- Konkatenation der linken Bäume zusammen mit einem neuen ∞-Dummy ergibt einen Baum für die Elemente bis x
- Konkatenation von $\langle y \rangle$ zusammen mit den rechten Bäumen ergibt einen Baum für die Elemente ab y

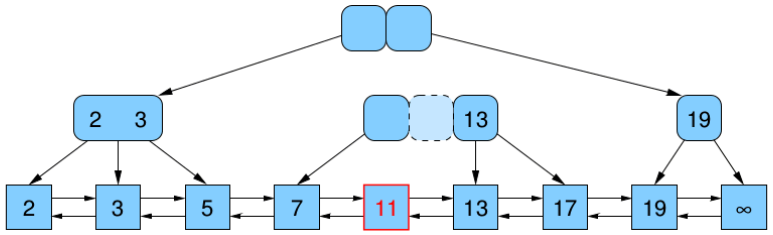
Aufspaltung eines (a, b)-Baums



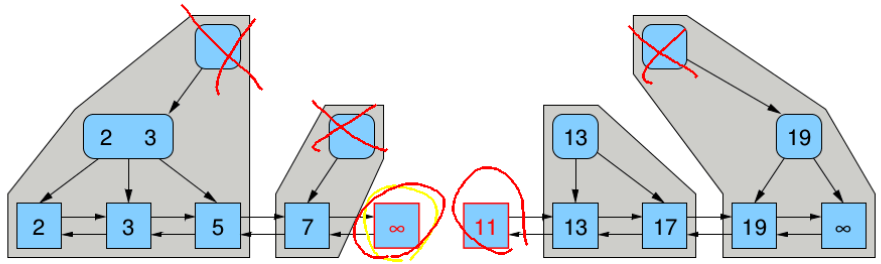
Aufspaltung eines (a, b)-Baums



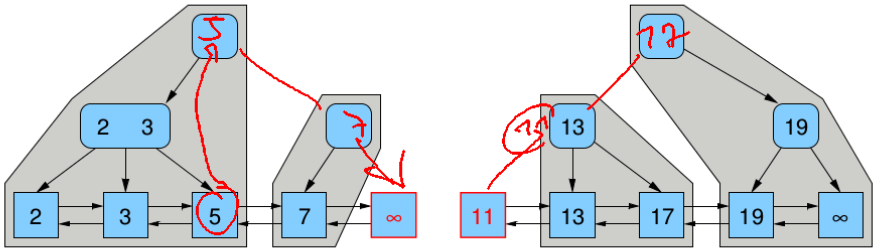
Aufspaltung eines (a, b)-Baums



Aufspaltung eines (a, b)-Baums



Aufspaltung eines (a, b)-Baums



Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- Sequenz $q = \langle w, \ldots, x, y, \ldots, z \rangle$ soll bei Schlüssel y in Teile $q_1 = \langle w, \ldots, x \rangle$ und $q_2 = \langle y, \ldots, z \rangle$ aufgespalten werden
- betrachte Pfad von Wurzel zum Blatt y
- spalte auf diesem Pfad jeden Knoten v in zwei Knoten v_ℓ und v_r
- v_ℓ bekommt Kinder links vom Pfad,
  v_r bekommt Kinder rechts vom Pfad
  (evt. gibt es Knoten ohne Kinder)
- Knoten mit Kind(ern) werden als Wurzeln von (a, b)-Bäumen interpretiert
- Konkatenation der linken Bäume zusammen mit einem neuen ∞-Dummy ergibt einen Baum für die Elemente bis x
- Konkatenation von $\langle y \rangle$ zusammen mit den rechten Bäumen ergibt einen Baum für die Elemente ab y

Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- diese $O(\log n)$ Konkatenationen können in Gesamtzeit $O(\log n)$ erledigt werden
- Grund: die linken Bäume haben echt monoton fallende, die rechten echt monoton wachsende Höhe
- Seien z.B. $r_1, r_2, \ldots, r_k$ die Wurzeln der linken Bäume und $h_1 > h_2 > \ldots > h_k$ deren Höhen
- verbinde zuerst r_{k-1} und r_k in Zeit $O(1 + h_{k-1} - h_k)$,
  dann r_{k-2} mit dem Ergebnis in Zeit $O(1 + h_{k-2} - h_{k-1})$,
  dann r_{k-3} mit dem Ergebnis in Zeit $O(1 + h_{k-3} - h_{k-2})$ usw.
- Gesamtzeit:

$$O\left(\sum_{1 \le i < k} (1 + h_i - h_{i+1})\right) = O(k + h_1 - h_k) \in O(\log n)$$

Suchstrukturen (a,b)-Bäume

Aufspaltung eines (a, b)-Baums

- diese $O(\log n)$ Konkatenationen können in Gesamtzeit $O(\log n)$ erledigt werden
- Grund: die linken Bäume haben echt monoton fallende, die rechten echt monoton wachsende Höhe
- Seien z.B. $r_1, r_2, \ldots, r_k$ die Wurzeln der linken Bäume und $h_1 > h_2 > \ldots > h_k$ deren Höhen
- verbinde zuerst r_{k-1} und r_k in Zeit $O(1 + h_{k-1} - h_k)$,
  dann r_{k-2} mit dem Ergebnis in Zeit $O(1 + h_{k-2} - h_{k-1})$,
  dann r_{k-3} mit dem Ergebnis in Zeit $O(1 + h_{k-3} - h_{k-2})$ usw.
- Gesamtzeit:

$$O\left(\sum_{1 \le i < k} (1 + h_i - h_{i+1})\right) = O(k + h_1 - h_k) \in O(\log n)$$

H. Seidl (TUM) GAD SS'16 347

Effizienz von insert / remove-Folgen

Satz

Es gibt eine Folge von n insert- und remove-Operationen auf einem anfangs leeren $(2,3)$-Baum, so dass die Gesamtanzahl der Knotenaufspaltungen und -verschmelzungen in $\Omega(n \log n)$ ist.

Beweis: *siehe Übung*

Effizienz von insert / remove-Folgen

Satz

Für (a,b)-Bäume, die die erweiterte Bedingung $b \geq 2a$ erfüllen, gilt:

Für jede Folge von n insert- und remove-Operationen auf einem anfangs leeren (a,b)-Baum ist die Gesamtanzahl der Knotenaufspaltungen und -verschmelzungen in $O(n)$.

Beweis: *amortisierte Analyse, nicht in dieser Vorlesung*

Netzwerk

Objekt bestehend aus

- Elementen und
- Interaktionen bzw. Verbindungen zwischen den Elementen

eher *informales* Konzept

- keine exakte Definition
- Elemente und ihre Verbindungen können ganz unterschiedlichen Charakter haben
- manchmal manifestiert in real existierenden Dingen, manchmal nur gedacht (virtuell)

Beispiele für Netzwerke

- Kommunikationsnetze: Internet, Telefonnetz
- Verkehrsnetze: Straßen-, Schienen-, Flug-, Nahverkehrsnetz
- Versorgungsnetzwerke: Strom, Wasser, Gas, Erdöl
- wirtschaftliche Netzwerke: Geld- und Warenströme, Handel
- biochemische Netzwerke: Metabolische und Interaktionsnetzwerke
- biologische Netzwerke: Gehirn, Ökosysteme
- soziale / berufliche Netzwerke: virtuell oder explizit (Communities)
- Publikationsnetzwerke: Zitationsnetzwerk, Koautor-Netzwerk

Graph

formales / abstraktes Objekt bestehend aus

- Menge von Knoten V (engl. vertices, nodes)
- Menge von Kanten E (engl. edges, lines, links), die jeweils ein Paar von Knoten verbinden
- Menge von Eigenschaften der Knoten und / oder Kanten

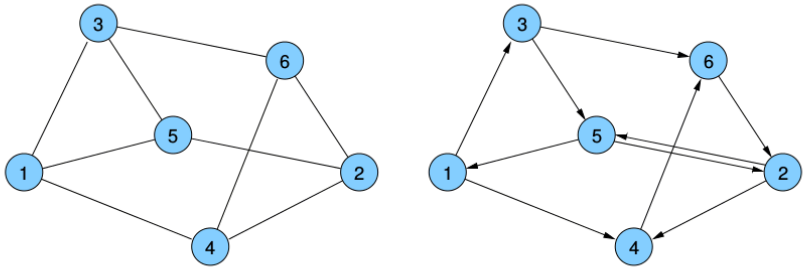
Notation:

- $G = (V, E)$
  manchmal auch $G = (V, E, w)$ im Fall gewichteter Graphen
- Anzahl der Knoten: $n = |V|$
  Anzahl der Kanten: $m = |E|$

Gerichtete und ungerichtete Graphen

Kanten bzw. Graphen

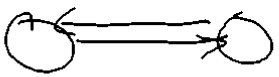
- ungerichtet: $E \subseteq \{\{v, w\} : v \in V, w \in V\}$
  (ungeordnetes Paar von Knoten bzw. 2-elementige Teilmenge)
- gerichtet: $E \subseteq \{(v, w) : v \in V, w \in V\}$, also $E \subseteq V \times V$
  (geordnetes Paar von Knoten)



Gerichtete und ungerichtete Graphen

Anwendungen:

- Ungerichtete Graphen:
  symmetrische Beziehungen (z.B. $\{v, w\} \in E$ genau dann, wenn Person v und Person w verwandt sind)
- Gerichtete Graphen:
  asymmetrische Beziehungen (z.B. $(v, w) \in E$ genau dann, wenn Person v Person w mag)
  kreisfreie Beziehungen (z.B. $(v, w) \in E$ genau dann, wenn Person v Vorgesetzter von Person w ist



hier:

- Modellierung von ungerichteten durch gerichtete Graphen
- Ersetzung ungerichteter Kanten durch je zwei antiparallele gerichtete Kanten

Nachbarn: Adjazenz, Inzidenz, Grad

- Sind zwei Knoten v und w durch eine Kante e verbunden, dann nennt man
  - v und w adjazent bzw. benachbart
  - v und e inzident (ebenso w und e)
- Anzahl der Nachbarn eines Knotens v: Grad $\deg(v)$

  bei gerichteten Graphen:
  - Eingangsgrad: $\deg^-(v) = |\{(w, v) \in E\}|$
  - Ausgangsgrad: $\deg^+(v) = |\{(v, w) \in E\}|$

Annahmen

- Graph (also Anzahl der Knoten und Kanten) ist endlich
- Graph ist einfach, d.h. E ist eine Menge und keine Multimenge (anderenfalls heißt G Multigraph)
- Graph enthält keine Schleifen (Kanten von v nach v)

Gewichtete Graphen

In Abhängigkeit vom betrachteten Problem wird Kanten und / oder Knoten oft eine Eigenschaft (z.B. eine Farbe oder ein numerischer Wert, das Gewicht) zugeordnet (evt. auch mehrere), z.B.

- Distanzen (in Längen- oder Zeiteinheiten)
- Kosten
- Kapazitäten / Bandbreite
- Ähnlichkeiten
- Verkehrsdichte

Wir nennen den Graphen dann

- knotengewichtet bzw.
- kantengewichtet

Beispiel: $w: \quad E \mapsto \mathbb{R}$
Schreibweise: $w(e)$ für das Gewicht einer Kante $e \in E$

Wege, Pfade und Kreise

- Weg (engl. *walk*) in einem Graphen $G = (V, E)$: alternierende Folge von Knoten und Kanten $x_0, e_1, \ldots, e_k, x_k$, so dass
  - $\forall i \in [0,k] : x_i \in V$ und
  - $\forall i \in [1,k] : e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ bzw. $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in E$.
- *Länge* eines Weges: Anzahl der enthaltenen Kanten
- Ein Weg ist ein Pfad, falls er (in sich) kantendisjunkt ist, falls also gilt: $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$.
- Ein Pfad ist ein einfacher Pfad, falls er (in sich) knotendisjunkt ist, falls also gilt: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.
- Ein Weg heißt *Kreis* (engl. *cycle*), falls $x_0 = x_k$.

Operationen

Graph G: Datenstruktur (Typ / Klasse, Variable / Objekt) für Graphen

Node: Datenstruktur für Knoten, Edge: Datenstruktur für Kanten

Operationen:

- G.insert(Edge e): $E := E \cup \{e\}$
- G.remove(Key i, Key j): $E := E \setminus \{e\}$ für Kante $e = (v,w)$ mit key$(v) = i$ und key$(w) = j$
- G.insert(Node v): $V := V \cup \{v\}$
- G.remove(Key i): sei $v \in V$ der Knoten mit key$(v) = i$ $V := V \setminus \{v\}$, $E := E \setminus \{(x,y) : x = v \vee y = v\}$
- G.find(Key i): gib Knoten v mit key$(v) = i$ zurück
- G.find(Key i, Key j): gib Kante (v,w) mit key$(v) = i$ und key$(w) = j$ zurück

Operationen

Anzahl der Knoten konstant

$\Rightarrow$ $V = \{0, \ldots, n-1\}$

- (Knotenschlüssel durchnummeriert)

Anzahl der Knoten variabel

- Hashing kann verwendet werden für ein Mapping der n Knoten in den Bereich $\{0, \ldots, O(n)\}$

$\Rightarrow$ nur konstanter Faktor der Vergrößerung gegenüber statischer Datenstruktur

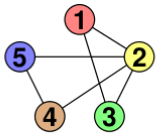
Graphrepräsentation

Darstellung von Graphen im Computer?

Vor- und Nachteile bei z.B. folgenden Fragen:

- Sind zwei gegebene Knoten v und w adjazent?
- Was sind die Nachbarn eines Knotens?
- Welche Knoten sind (direkte oder indirekte) Vorgänger bzw. Nachfolger eines Knotens v in einem gerichteten Graphen?
- Wie aufwendig ist das Einfügen oder Löschen eines Knotens bzw. einer Kante?

Kantenliste



$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}$

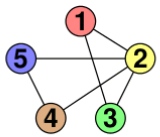
Vorteil:

- Speicherbedarf $O(m+n)$
- Einfügen von Knoten und Kanten in $O(1)$
- Löschen von Kanten per Handle in $O(1)$

Nachteil:

- G.find(Key i, Key j): im worst case $\Theta(m)$
- G.remove(Key i, Key j): im worst case $\Theta(m)$
- Nachbarn nur in $O(m)$ feststellbar

Adjazenzmatrix



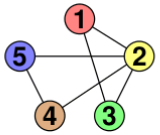
Vorteil:

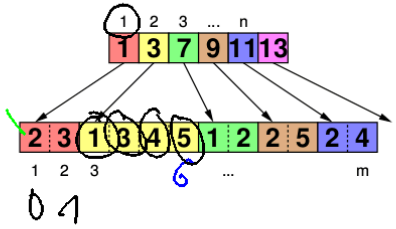
- in $O(1)$ feststellbar, ob zwei Knoten Nachbarn sind
- ebenso Einfügen und Löschen von Kanten

Nachteil:

- kostet $\Theta(n^2)$ Speicher, auch bei Graphen mit $o(n^2)$ Kanten
- Finden aller Nachbarn eines Knotens kostet $O(n)$
- Hinzufügen neuer Knoten ist schwierig

Adjazenzarrays





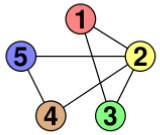
Vorteil:

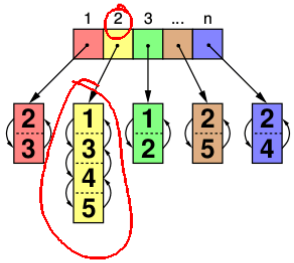
- Speicherbedarf:
  gerichtete Graphen: $n + m + \Theta(1)$
  (hier noch kompakter als Kantenliste mit $2m$)
  ungerichtete Graphen: $n + 2m + \Theta(1)$

Nachteil:

- Einfügen und Löschen von Kanten ist schwierig, deshalb nur für statische Graphen geeignet

Adjazenzlisten





Unterschiedliche Varianten:
einfach/doppelt verkettet, linear/zirkulär

Vorteil:

- Einfügen von Kanten in $O(d)$ oder $O(1)$
- Löschen von Kanten in $O(d)$ (per Handle in $O(1)$)
- mit unbounded arrays etwas cache-effizienter

Nachteil:

- Zeigerstrukturen verbrauchen relativ viel Platz und Zugriffszeit

Adjazenzliste + Hashtabelle

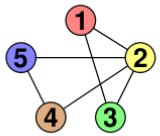
- speichere Adjazenzliste (Liste von adjazenten Knoten bzw. inzidenten Kanten zu jedem Knoten)
- speichere Hashtabelle, die zwei Knoten auf einen Zeiger abbildet, der dann auf die ggf. vorhandene Kante verweist

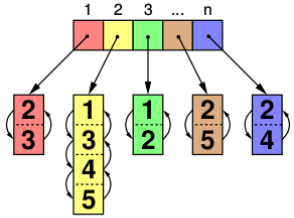
Zeitaufwand:

- G.find(Key i, Key j): $O(1)$ (worst case)
- G.insert(Edge e): $O(1)$ (im Mittel)
- G.remove(Key i, Key j): $O(1)$ (im Mittel)

Speicheraufwand: $O(n + m)$

Adjazenzlisten





Unterschiedliche Varianten:
einfach/doppelt verkettet, linear/zirkulär

Vorteil:

- Einfügen von Kanten in $O(d)$ oder $O(1)$
- Löschen von Kanten in $O(d)$ (per Handle in $O(1)$)
- mit unbounded arrays etwas cache-effizienter

Nachteil:

- Zeigerstrukturen verbrauchen relativ viel Platz und Zugriffszeit

Adjazenzliste + Hashtabelle

- speichere Adjazenzliste (Liste von adjazenten Knoten bzw. inzidenten Kanten zu jedem Knoten)
- speichere Hashtabelle, die zwei Knoten auf einen Zeiger abbildet, der dann auf die ggf. vorhandene Kante verweist

Zeitaufwand:

- G.find(Key i, Key j): $O(1)$ (worst case)
- G.insert(Edge e): $O(1)$ (im Mittel)
- G.remove(Key i, Key j): $O(1)$ (im Mittel)

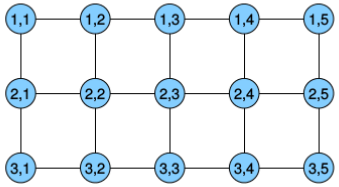
Speicheraufwand: $O(n+m)$

Implizite Repräsentation

Beispiel: Gitter-Graph (grid graph)

- definiert durch zwei Parameter k und ℓ

$$\begin{aligned} V &= [1,\ldots,k] \times [1,\ldots,\ell] \\ E &= \left\{((i,j),(i,j')) \in V^2 : |j-j'| = 1\right\} \cup \\ &\quad \left\{((i,j),(i',j)) \in V^2 : |i-i'| = 1\right\} \end{aligned}$$



- Kantengewichte könnten in 2 zweidimensionalen Arrays gespeichert werden:
  eins für waagerechte und eins für senkrechte Kanten

Graphtraversierung

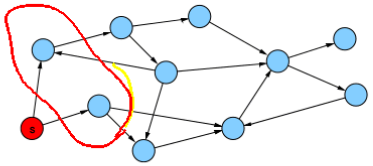
Problem:

Wie kann man die Knoten eines Graphen systematisch durchlaufen?

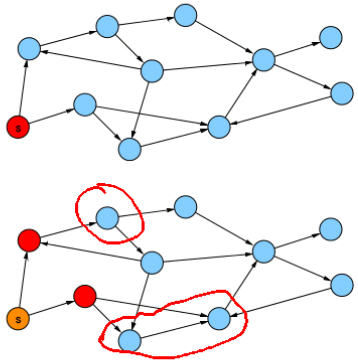
Grundlegende Strategien:

- Breitensuche (breadth-first search, BFS)
- Tiefensuche (depth-first search, DFS)

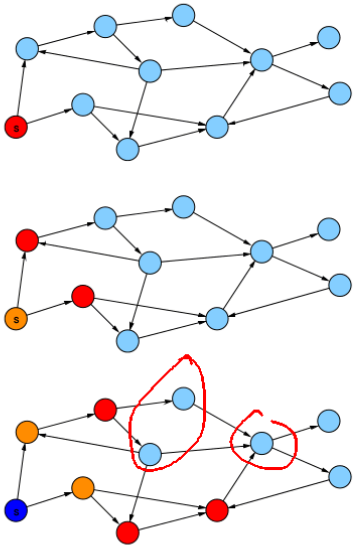
Breitensuche



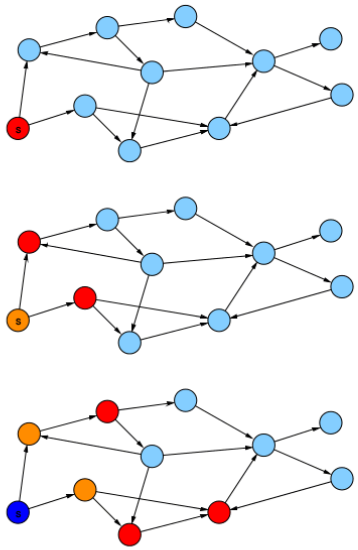
Breitensuche

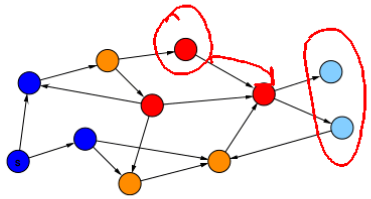


Breitensuche



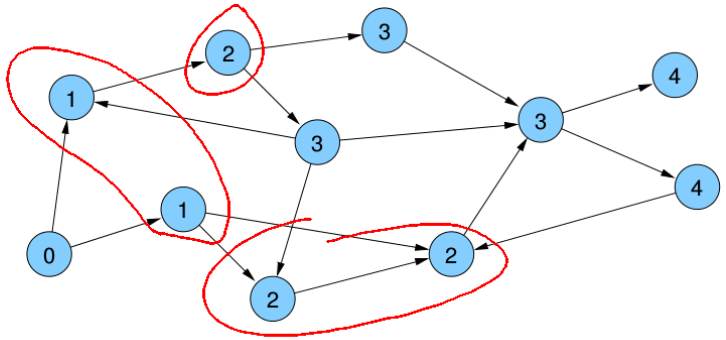
Breitensuche





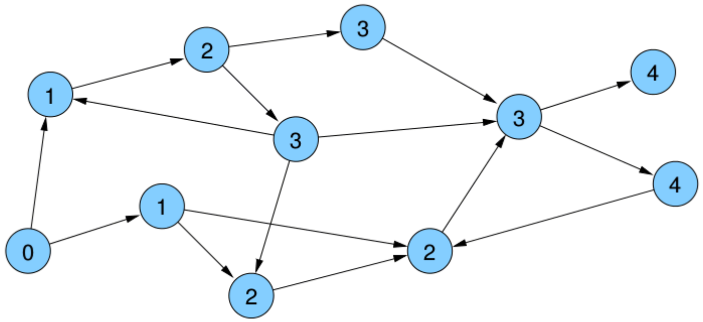
Breitensuche

- $d(v)$: Distanz von Knoten v zu s ($d(s) = 0$)



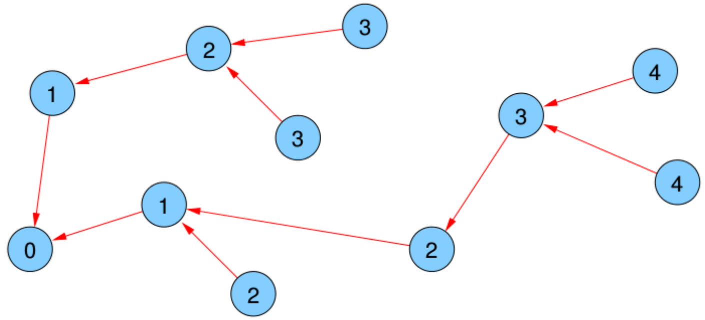
Breitensuche

- $d(v)$: Distanz von Knoten v zu s ($d(s) = 0$)



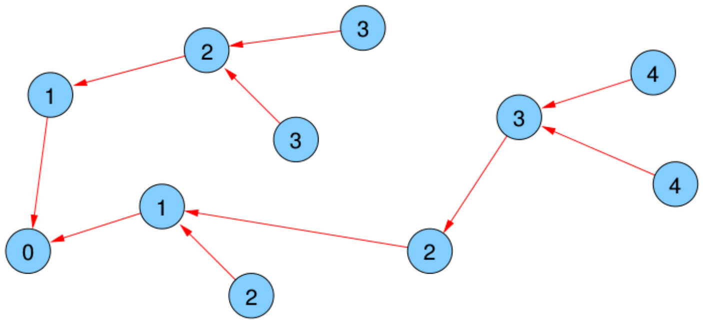
Breitensuche

- parent(v): Knoten, von dem v entdeckt wurde
- parent wird beim ersten Besuch von v gesetzt ($\Rightarrow$ eindeutig)



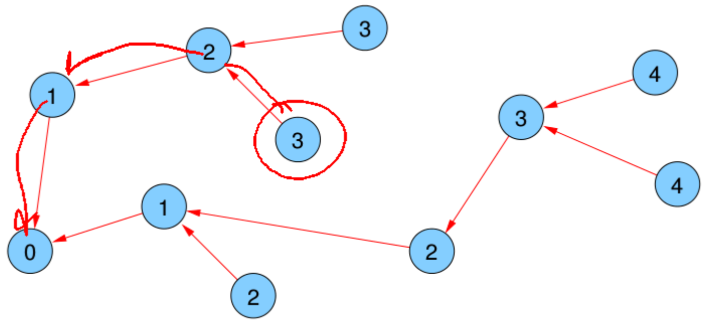
Breitensuche

- parent(v): Knoten, von dem v entdeckt wurde
- parent wird beim ersten Besuch von v gesetzt ($\Rightarrow$ eindeutig)



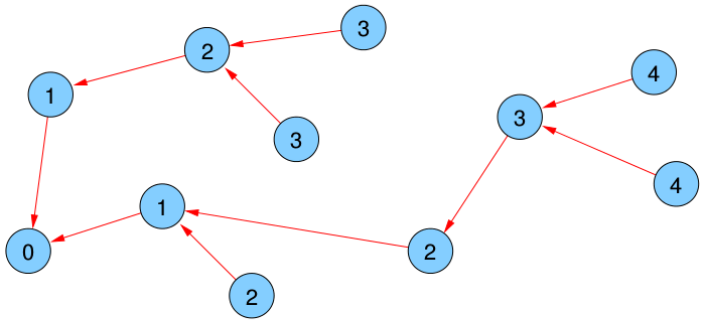
Breitensuche

- parent(v): Knoten, von dem v entdeckt wurde
- parent wird beim ersten Besuch von v gesetzt ($\Rightarrow$ eindeutig)



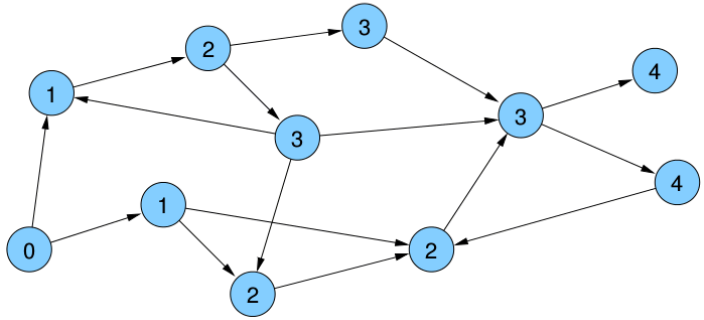
Breitensuche

- parent(v): Knoten, von dem v entdeckt wurde
- parent wird beim ersten Besuch von v gesetzt ($\Rightarrow$ eindeutig)



Breitensuche

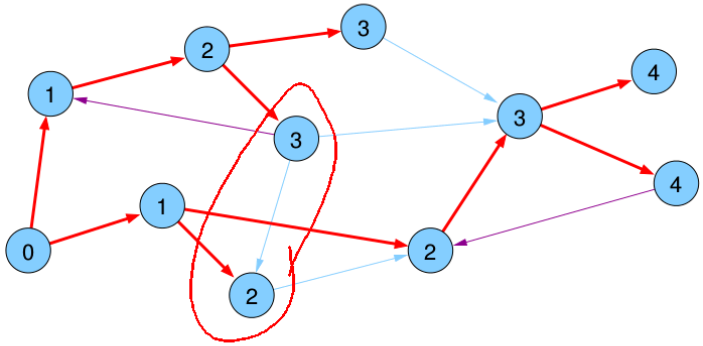
- $d(v)$: Distanz von Knoten v zu s ($d(s) = 0$)



Breitensuche

Kantentypen:

- Baumkanten: zum Kind
- Rückwärtskanten: zu einem Vorfahren
- Kreuzkanten: sonstige

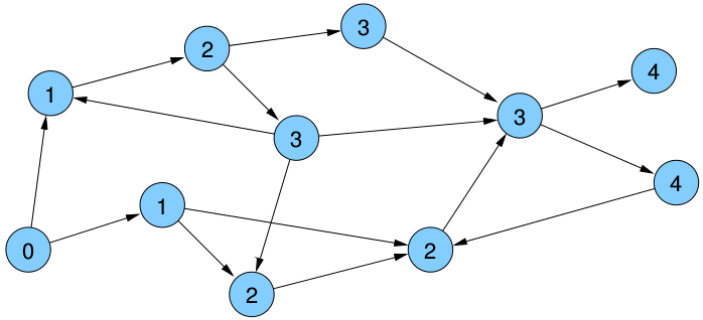


Breitensuche

```
BFS(Node s) {
    d[s] = 0;
    parent[s] = s;
    List<Node> q = ⟨s⟩;
    while ( !q.empty() ) {
        u = q.popFront();
        foreach ((u, v) ∈ E) {
            if (parent[v] == null) {
                q.pushBack(v);
                d[v] = d[u]+1;
                parent[v] = u;
            }
        }
    }
}
```

Breitensuche

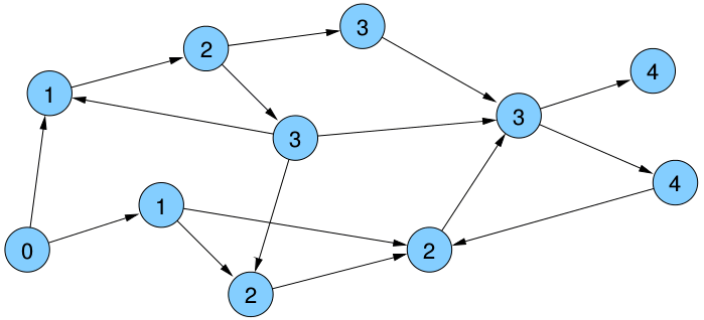
Anwendung: Single Source Shortest Path (SSSP) Problem
in ungewichteten Graphen



Graphen Graphtraversierung

Breitensuche

Anwendung: Single Source Shortest Path (SSSP) Problem
in ungewichteten Graphen



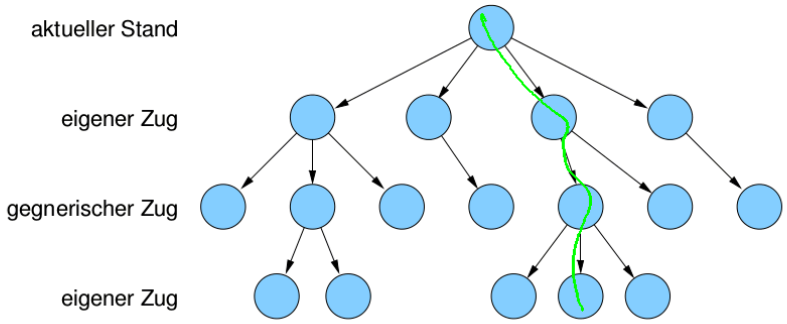
H. Seidl (TUM) GAD SS'16 379

Graphen Graphtraversierung

Breitensuche

Anwendung: Bestimmung des nächsten Zugs bei Spielen

Exploration des Spielbaums



Problem: halte Aufwand zur Suche eines guten Zuges in Grenzen

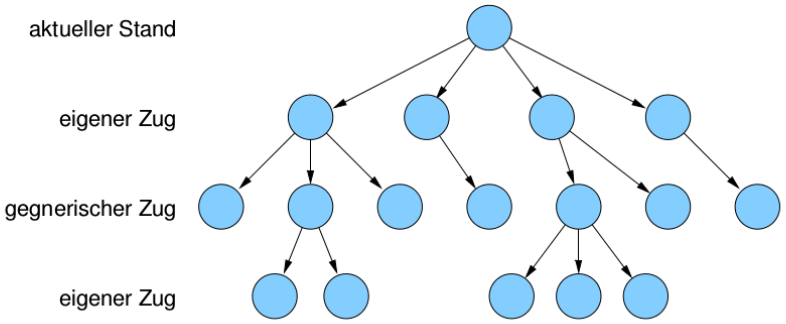
H. Seidl (TUM) GAD SS'16 380

Graphen Graphtraversierung

Breitensuche

Anwendung: Bestimmung des nächsten Zugs bei Spielen

Exploration des Spielbaums



Problem: halte Aufwand zur Suche eines guten Zuges in Grenzen

H. Seidl (TUM) GAD SS'16 380

Breitensuche

Anwendung: Bestimmung des nächsten Zugs bei Spielen

- Standard-BFS: verwendet FIFO-Queue

  ebenenweise Erkundung

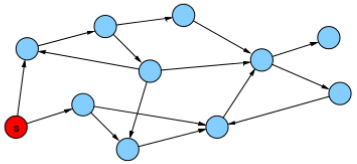
  aber: zu teuer!

- Best-First Search: verwendet Priority Queue

  (z.B. realisiert durch binären Heap)

  Priorität eines Knotens wird durch eine Güte-Heuristik des repräsentierten Spielzustands gegeben

Tiefensuche



Tiefensuche