Script generated by TTT

Title: Seidl: GAD (20.04.2016)

Date: Wed Apr 20 13:23:07 CEST 2016

Duration: 43:58 min

Pages: 33

Beispiel: BubbleSort

Sortieren durch Aufsteigen

Vertausche in jeder Runde in der (verbleibenden) Eingabesequenz (hier vom Ende in Richtung Anfang) jeweils zwei benachbarte Elemente, die nicht in der richtigen Reihenfolge stehen

Beispiel

5	10	19	1	14	3
5	10	19	1	3	14
5	10	1	19	3	14
5	1	10	19	3	14
1	5	10	19	3	14

1	5	10	3	19	14
1	5	3	10	19	14
1	**3**	5	10	19	14
1	3	**5**	10	14	19
1	3	5	**10**	**14**	**19**

Beispiel: Sortieren

Prozedur BubbleSort(A, n)

Eingabe : n: Anzahl der Zahlen
$A[0], \ldots, A[n-1]$: Zahlenfolge

Ausgabe : Sortierte Zahlenfolge A

for $(i = 0; i < n-1; i{+}{+})$ **do**	$O(\sum_{i=0}^{n-2} T(I_1))$
for $(j = n-2; j \geq i; j{-}{-})$ **do**	$O(\sum_{j=i}^{n-2} T(I_2))$
if $A[j] > A[j+1]$ **then**	$O(1 + T(I_3))$
$x = A[j]$;	$O(1)$
$A[j] = A[j+1]$;	$O(1)$
$A[j+1] = x$;	$O(1)$

$$O\left(\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i}^{n-2} 1\right)$$

Effizienz | Laufzeitanalyse

Beispiel: BubbleSort

Sortieren durch Aufsteigen

Vertausche in jeder Runde in der (verbleibenden) Eingabesequenz (hier vom Ende in Richtung Anfang) jeweils zwei benachbarte Elemente, die nicht in der richtigen Reihenfolge stehen

Beispiel

5	10	19	1	14	3
5	10	19	1	3	14
5	10	1	19	3	14
5	1	10	19	3	14
1	5	10	19	3	14

1	5	10	3	19	14
1	5	3	10	19	14
1	**3**	5	10	19	14
1	3	**5**	10	14	19
1	3	5	**10**	**14**	**19**

H. Seidl (TUM) | GAD | SS'16 74

Beispiel: Sortieren

Prozedur BubbleSort(A, n)
Eingabe : n: Anzahl der Zahlen
$A[0], \ldots, A[n-1]$: Zahlenfolge
Ausgabe : Sortierte Zahlenfolge A

for $(i = 0; i < n-1; i{+}{+})$ **do**	$O(\sum_{i=0}^{n-2} T(I_1))$
for $(j = n-2; j \geq i; j{-}{-})$ **do**	$O(\sum_{j=i}^{n-2} T(I_2))$
if $A[j] > A[j+1]$ **then**	$O(1 + T(I_3))$
$x = A[j]$;	$O(1)$
$A[j] = A[j+1]$;	$O(1)$
$A[j+1] = x$;	$O(1)$

$$O\left(\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i}^{n-2} 1\right)$$

Beispiel: Sortieren

$n - 2 + 1 - i$

$n - 1$

$$\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i}^{n-2} 1 = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) \quad + n - 2$$

≥ 0

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$= O\left(n^2\right)$$

Beispiel: Binäre Suche

Prozedur BinarySearch(A, n, x)
Eingabe : n: Anzahl der (sortierten) Zahlen
$A[0], \ldots, A[n-1]$: Zahlenfolge
x: gesuchte Zahl
Ausgabe : Index der gesuchten Zahl

$\ell = 0$;	$O(1)$
$r = n - 1$;	$O(1)$
while $(\ell \leq r)$ **do**	$O(\sum_{i=1}^{k} T(I))$
$m = \lfloor (r+\ell)/2 \rfloor$;	$O(1)$ ↑
if $A[m] == x$ **then return** m;	$O(1)$
if $A[m] < x$ **then** $\ell = m + 1$;	$O(1)$
else $r = m - 1$;	$O(1)$
return -1	$O(1)$

$$O\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) = O(k)$$

Beispiel: Binäre Suche

Aber: Wie groß ist die Anzahl der Schleifendurchläufe k?

Größe des verbliebenen Suchintervalls $(r - \ell + 1)$ nach Iteration i:

$$\begin{aligned} s_0 &= n \\ s_{i+1} &\leq \lfloor s_i/2 \rfloor \end{aligned}$$

Bei $s_i < 1$ endet der Algorithmus.

$$\Rightarrow \quad k \leq \log_2 n$$

Gesamtkomplexität: $O(\log n)$

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

Algorithmus Bresenham1: zeichnet einen Kreis

```
x = 0;   y = R;                                                  O(1)
plot(0, R); plot(R, 0); plot(0, −R); plot(−R, 0);                O(1)
F = 5/4 − R;                                                     O(1)
while x < y do                                                   O(Σ_{i=1}^k T(I))
    if F < 0 then
        F = F + 2 ∗ x + 1;
    else
        F = F + 2 ∗ x − 2 ∗ y + 2;                               alles O(1)
        y = y − 1;
    x = x + 1;
    plot(x, y); plot(−x, y); plot(−y, x); plot(−y, −x);
    plot(y, x); plot(y, −x); plot(x, −y); plot(−x, −y);
```

Wie groß ist Anzahl Schleifendurchläufe k? $\qquad O\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) = O(k)$

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

- Betrachte dazu die Entwicklung der Werte der Funktion

$$\varphi(x, y) = y - x$$

- Anfangswert: $\varphi_0(x, y) = R$
- Monotonie: verringert sich pro Durchlauf um mindestens 1
- Beschränkung: durch die **while**-Bedingung $x < y$ bzw. $0 < y - x$

$\Rightarrow$ maximal R Runden

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

- Betrachte dazu die Entwicklung der Werte der Funktion

$$\varphi(x, y) = y - x$$

- Anfangswert: $\varphi_0(x, y) = R$
- Monotonie: verringert sich pro Durchlauf um mindestens 1
- Beschränkung: durch die **while**-Bedingung $x < y$ bzw. $0 < y - x$

$\Rightarrow$ maximal R Runden

Beispiel: Fakultätsfunktion

Funktion fakultaet(n)

Eingabe : $n \in \mathbb{N}_+$
Ausgabe : $n!$

```
if (n == 1) then                     O(1)
    return 1                         O(1)
else
    return n ∗ fakultaet(n − 1)      O(1 + ...?)
```

- $T(n)$: Laufzeit von fakultaet(n)
- $T(1) = O(1)$
- $T(n) = T(n-1) + O(1)$

$\Rightarrow$ $T(n) = O(n)$

Average Case Complexity

Uniforme Verteilung:
(alle Instanzen gleichwahrscheinlich)

$$t(n) = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} T(i)$$

Tatsächliche Eingabeverteilung kann in der Praxis aber stark von uniformer Verteilung abweichen.

Dann

$$t(n) = \sum_{i \in \mathcal{I}_n} p_i \cdot T(i)$$

Aber: meist schwierig zu berechnen!

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Prozedur increment(A)
Eingabe : Array A mit Binärzahl in $A[0] \dots A[n-1]$, in $A[n]$ steht eine 0
Ausgabe : inkrementierte Binärzahl in $A[0] \dots A[n]$

```
i = 0;
while (A[i] == 1) do
    A[i] = 0;
    i = i + 1;
A[i] = 1;
```

0 0 0 0 0
0 0 0 0 1

1 0 1 1 1
1 1 0 0 0

Durchschnittliche Laufzeit für Zahl mit n Bits?

Binärzahl-Inkrementierung: Analyse

- $\mathcal{I}_n$: Menge der n-Bit-Instanzen
- Für die Hälfte (also $\frac{1}{2}|\mathcal{I}_n|$) der Zahlen $x_{n-1} \dots x_0 \in \mathcal{I}_n$ ist $x_0 = 0$
  $\Rightarrow$ 1 Schleifendurchlauf
- Für die andere Hälfte gilt $x_0 = 1$.
  Bei diesen gilt wieder für die Hälfte (also $\frac{1}{4}|\mathcal{I}_n|$) $x_1 x_0 = 01$
  $\Rightarrow$ 2 Schleifendurchläufe
- Für den Anteil $(\frac{1}{2})^k$ der Zahlen gilt $x_{k-1} x_{k-2} \dots x_0 = 01 \dots 1$
  $\Rightarrow$ k Schleifendurchläufe

Durchschnittliche Anzahl Schleifendurchläufe:

$$t(n) = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} T(i) = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\mathcal{I}_n|}{2^k} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \stackrel{?}{=} \mathcal{O}(1)$$

Binärzahl-Inkrementierung: Abschätzung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \le 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Binärzahl-Inkrementierung: Abschätzung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beweis

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1+2}{2^1}$ ✓

Binärzahl-Inkrementierung: Abschätzung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beweis

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1+2}{2^1}$ ✓

Induktionsvoraussetzung:

Für n gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Binärzahl-Inkrementierung: Abschätzung

Beweis.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Binärzahl-Inkrementierung: Abschätzung

Beweis.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Binärzahl-Inkrementierung: Abschätzung

Beweis.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\leq 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \qquad \text{(laut Ind.vor.)} \\
&= 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

□

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Der Wertebereich diskreter Zufallsvariablen

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ist ebenfalls endlich bzw. abzählbar unendlich.

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Der Wertebereich diskreter Zufallsvariablen

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ist ebenfalls endlich bzw. abzählbar unendlich.

Schreibweise: $\Pr[X = x] := \Pr\left[X^{-1}(x)\right] = \sum_{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x} \Pr[\omega]$

Zufallsvariable

Beispiel

Wir ziehen aus einem Poker-Kartenspiel mit 52 Karten (13 von jeder Farbe) eine Karte.

Wir bekommen bzw. bezahlen einen bestimmten Betrag, je nachdem welche Farbe die Karte hat, z.B. 4 Euro für Herz, 7 Euro für Karo, -5 Euro für Kreuz und -3 Euro für Pik.

Wenn wir ein As ziehen, bekommen wir zusätzlich 1 Euro.

Zufallsvariable

Beispiel

Wir ziehen aus einem Poker-Kartenspiel mit 52 Karten (13 von jeder Farbe) eine Karte.

Wir bekommen bzw. bezahlen einen bestimmten Betrag, je nachdem welche Farbe die Karte hat, z.B. 4 Euro für Herz, 7 Euro für Karo, -5 Euro für Kreuz und -3 Euro für Pik.

Wenn wir ein As ziehen, bekommen wir zusätzlich 1 Euro.

$\Omega = \{\heartsuit A, \heartsuit K, \ldots, \heartsuit 2, \diamondsuit A, \diamondsuit K, \ldots, \diamondsuit 2, \clubsuit A, \clubsuit K, \ldots, \clubsuit 2, \spadesuit A, \spadesuit K, \ldots, \spadesuit 2\}$.

X sei der Geldbetrag den wir bekommen bzw. bezahlen.

Zufallsvariable

Beispiel

Wir ziehen aus einem Poker-Kartenspiel mit 52 Karten (13 von jeder Farbe) eine Karte.

Wir bekommen bzw. bezahlen einen bestimmten Betrag, je nachdem welche Farbe die Karte hat, z.B. 4 Euro für Herz, 7 Euro für Karo, -5 Euro für Kreuz und -3 Euro für Pik.

Wenn wir ein As ziehen, bekommen wir zusätzlich 1 Euro.

$\Omega = \{\heartsuit A, \heartsuit K, \ldots, \heartsuit 2, \diamondsuit A, \diamondsuit K, \ldots, \diamondsuit 2, \clubsuit A, \clubsuit K, \ldots, \clubsuit 2, \spadesuit A, \spadesuit K, \ldots, \spadesuit 2\}$.

X sei der Geldbetrag den wir bekommen bzw. bezahlen.

$W_X = \{-5, -4, -3, -2, 4, 5, 7, 8\}$

$\Pr[X = -3] = \Pr[\spadesuit K] + \ldots + \Pr[\spadesuit 2] = 12/52 = 3/13$

Erwartungswert

Definition

Für eine diskrete Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert (absolute Konvergenz).

Erwartungswert

Definition

Für eine diskrete Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert (absolute Konvergenz).

Bei endlicher Ereignismenge und gleichwahrscheinlichen Ereignissen entspricht der Erwartungswert dem Durchschnitt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

Erwartungswert

Beispiel

(Beispiel wie zuvor)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 4 \cdot \frac{12}{52} + 5 \cdot \frac{1}{52} + 7 \cdot \frac{12}{52} + 8 \cdot \frac{1}{52} \\ &\quad + (-5) \cdot \frac{12}{52} + (-4) \cdot \frac{1}{52} + (-3) \cdot \frac{12}{52} + (-2) \cdot \frac{1}{52} = \frac{43}{52}\end{aligned}$$

Wir bekommen also im Erwartungswert $\frac{43}{52}$ Euro pro gezogener Karte.

Grundlagen zu diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie findet man z.B. in folgendem Buch:

Th. Schickinger, A. Steger
Diskrete Strukturen – Band 2
(Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik)
Springer-Verlag, 2001.

Erwartungswert

Beispiel

(Beispiel wie zuvor)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 4 \cdot \frac{12}{52} + 5 \cdot \frac{1}{52} + 7 \cdot \frac{12}{52} + 8 \cdot \frac{1}{52} \\ &\quad + (-5) \cdot \frac{12}{52} + (-4) \cdot \frac{1}{52} + (-3) \cdot \frac{12}{52} + (-2) \cdot \frac{1}{52} = \frac{43}{52}\end{aligned}$$

Wir bekommen also im Erwartungswert $\frac{43}{52}$ Euro pro gezogener Karte.

Grundlagen zu diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie findet man z.B. in folgendem Buch:

Th. Schickinger, A. Steger
Diskrete Strukturen – Band 2
(Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik)
Springer-Verlag, 2001.

Erwartungswert

Beispiel

Münze werfen, bis sie zum ersten Mal Kopf zeigt

Zufallsvariable k: Anzahl der Versuche

k ungerade: Spieler bezahlt etwas an die Bank
k gerade: Spieler bekommt etwas von der Bank

Zufallsvariable X: Gewinnbetrag der Bank

Variante 1: Spieler bezahlt / bekommt k Euro
$\mathbb{E}[X]$ existiert (absolute Konvergenz)

Variante 2: Spieler bezahlt / bekommt 2^k Euro
$\mathbb{E}[X]$ existiert nicht (keine Konvergenz)

Variante 3: Spieler bezahlt / bekommt $\frac{2^k}{k}$ Euro
$\mathbb{E}[X]$ existiert nicht (Konvergenz, aber keine absolute)

Erwartungswert zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und

$$X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Interessant ist für uns vor allem der einfache Fall:

$$X := X_1 + \ldots + X_n$$

mit

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n].$$