Script generated by TTT

Title: TÃ¤ubig: GAD (13.06.2013)

Date: Thu Jun 13 12:16:23 CEST 2013

Duration: 29:25 min

Pages: 9

Laufzeiten des Binären Heaps

- min(): $\mathcal{O}(1)$
- insert(e): $\mathcal{O}(\log n)$
- deleteMin(): $\mathcal{O}(\log n)$
- build($e_0, \ldots, e_{n-1}$): $\mathcal{O}(n)$
- M.merge(Q): $\Theta(n)$

Adressen bzw. Feldindizes in array-basierten Binärheaps können nicht als Handles verwendet werden, da die Elemente bei den Operationen verschoben werden
$\Rightarrow$ ungeeignet als adressierbare PQs (kein remove bzw. decreaseKey)

HeapSort

Verbesserung von SelectionSort:

- erst build($e_0, \ldots, e_{n-1}$): $\mathcal{O}(n)$
- dann $n \times$ deleteMin():
  vertausche in jeder Runde erstes und letztes Heap-Element, dekrementiere Heap-Größe und führe siftDown(0) durch:
  $\mathcal{O}(n \log n)$

$\Rightarrow$ sortiertes Array entsteht von hinten,
ansteigende Sortierung kann mit Max-Heap erzeugt werden

- in-place, aber nicht stabil
- Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(n \log n)$

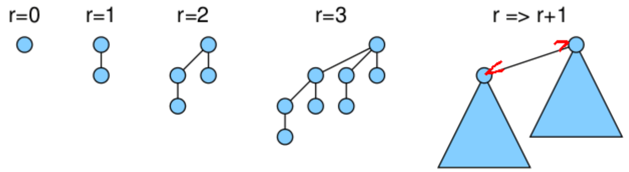
Übersicht

7. Priority Queues
   - Allgemeines
   - Heaps
   - Binomial Heaps

Binomial-Bäume

Binomial Heaps bestehen aus Binomial-Bäumen

- Form-Invariante:



- Heap-Invariante:

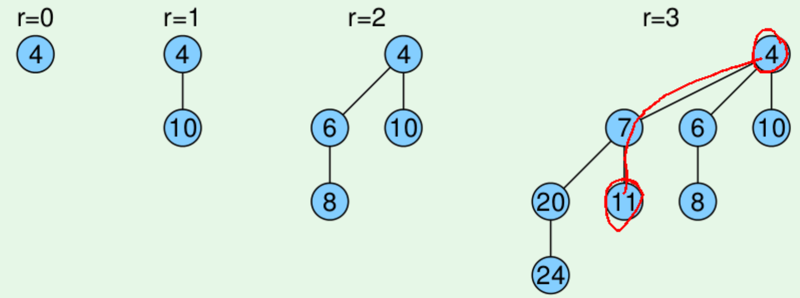
$$\text{prio(Vater)} \leq \text{prio(Kind)}$$

Elemente der Priority Queue werden in Heap Items gespeichert, die eine feste Adresse im Speicher haben und damit als Handles dienen können (im Gegensatz zu array-basierten Binärheaps)

Binomial-Bäume

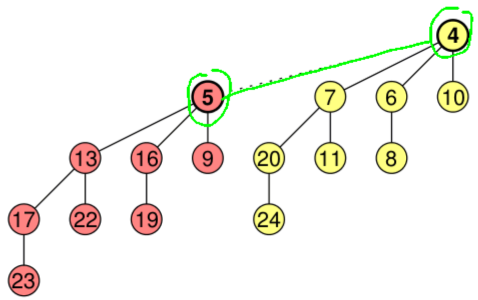
Beispiel

Korrekte Binomial-Bäume:

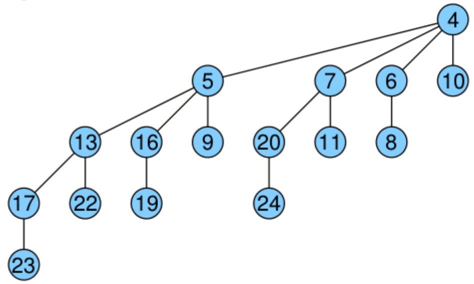


Binomial-Baum: Merge

Wurzel mit größerem Wert wird neues Kind der Wurzel mit kleinerem Wert! (Heap-Bedingung)

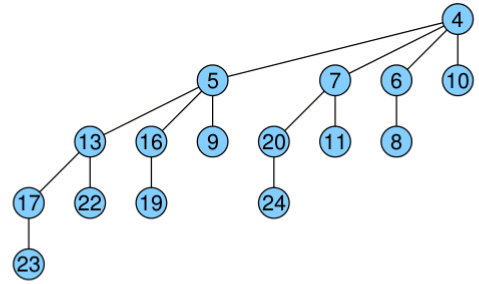


aus zwei B_{r-1} wird ein B_r

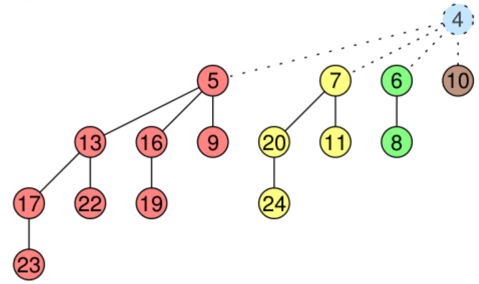


Binomial-Baum: Löschen der Wurzel (deleteMin)

aus einem B_r



werden $B_{r-1}, \ldots, B_0$



Binomial-Baum: Knotenanzahl

B_r hat auf Level $k \in \{0, \dots, r\}$ genau $\binom{r}{k}$ Knoten

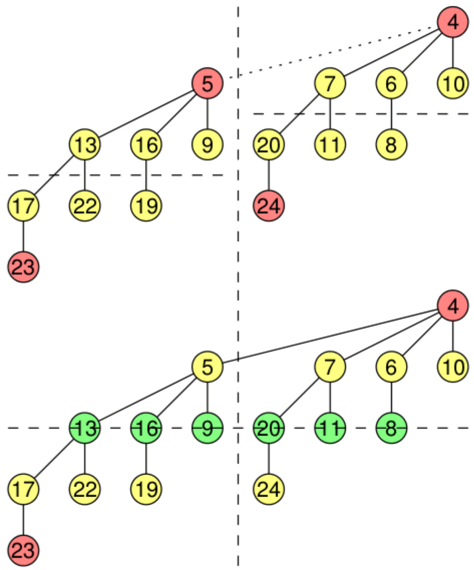
Warum?

Bei Bau des B_r aus 2 B_{r-1} gilt:

$$\binom{r}{k} = \underline{\binom{r-1}{k-1}} + \underline{\binom{r-1}{k}}$$

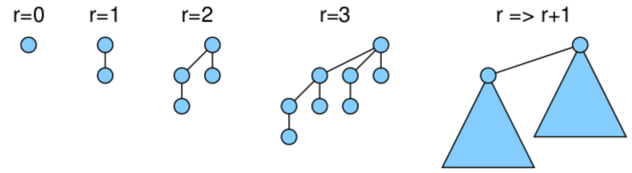
Insgesamt: B_r hat 2^r Knoten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



Binomial-Bäume

Eigenschaften von Binomial-Bäumen:



Binomial-Baum vom Rang r

- hat Höhe r (gemessen in Kanten)
- hat maximalen Grad r (Wurzel)
- hat auf Level $\ell \in \{0, \dots, r\}$ genau $\binom{r}{\ell}$ Knoten
- hat $\sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} = 2^r$ Knoten
- zerfällt bei Entfernen der Wurzel in r Binomial-Bäume von Rang 0 bis $r-1$