Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (23.01.2014)

Date: Thu Jan 23 10:16:27 CET 2014

Duration: 94:56 min

Pages: 37

WS 2013/14

Diskrete Strukturen

Prof. Dr. J. Esparza

Lehrstuhl für Grundlagen der Softwarezuverlässigkeit und theoretische Informatik
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www7.in.tum.de/um/courses/ds/ws1314

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Das Heiratsproblem
  - Gegeben seien heiratswillige Damen und Herren. Jede Dame gibt an, mit welchem der Herren sie sich eventuell vermählen würde.
  - Das Problem besteht nun darin, möglichst viele Damen so zu verheiraten, dass jede Dame einen Herren ihrer Wahl erhält, und dass selbstverständlich keine zwei Damen mit demselben Herrn verheiratet sind.

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Das Heiratsproblem
  - Der einer konkreten Situation zugrundeliegende bipartite Graph.
  - Das Problem:

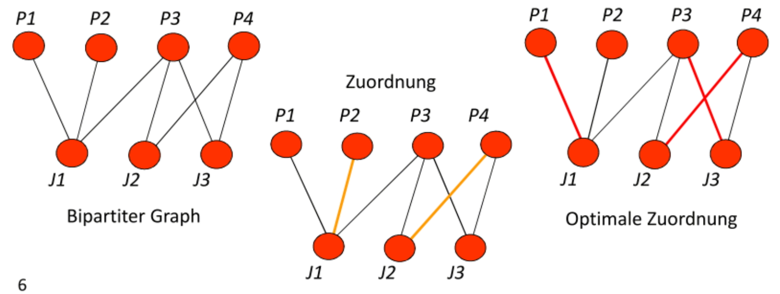
    Finde eine maximale Menge M von Kanten, so dass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben.

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Job-Zuordnung
  - Gegeben m Arbeitnehmer mit unterschiedlichen Fähigkeiten und n Jobs.
  - Gesucht ist eine Zuordnung, so dass möglichst viele Jobs vermittelt werden.

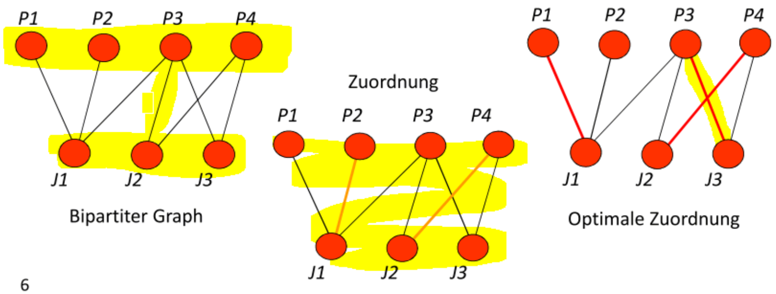
Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Job-Zuordnung
  - Gesucht ist eine Zuordnung, so dass möglichst viele Jobs vermittelt werden.



Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Job-Zuordnung
  - Gesucht ist eine Zuordnung, so dass möglichst viele Jobs vermittelt werden.

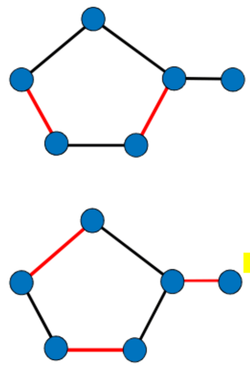


Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings

  Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
  - Ein Matching ist eine Menge $M \subseteq E$ von paarweise disjunkten Kanten.
  - Ein Maching M ist perfekt, falls jeder Knoten zu (genau) einer Kante von M gehört.

  Fakt: Ein Matching M ist perfekt gdw. $|M| = |V|/2$.



Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen.

  Der Heiratssatz sagt:

  Jede Dame kann mit einem Wunschkandidaten verheiratet werden genau dann, wenn …

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen.

  Satz (Heiratssatz – Hall 1935):

  Für einen bipartiten Graphen $G = (A, B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $|M| = |A|$, wenn gilt

  $$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ für alle } X \subseteq A.$$

  Hierbei ist $\Gamma(X)$ die Nachbarschaft der Knotenmenge X, d.h. $\Gamma(X) = \bigcup_{v \in X} \Gamma(v)$.

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen.

  Beweis des Heiratssatzes.

  ($\Rightarrow$): Indirekter Beweis.

  Wenn es ein $X \subseteq A$ gibt mit $|X| > |\Gamma(X)|$ gibt, dann können nicht alle Knoten aus X zugleich gematcht werden. Es gibt also kein Matching M mit $|M| = |A|$

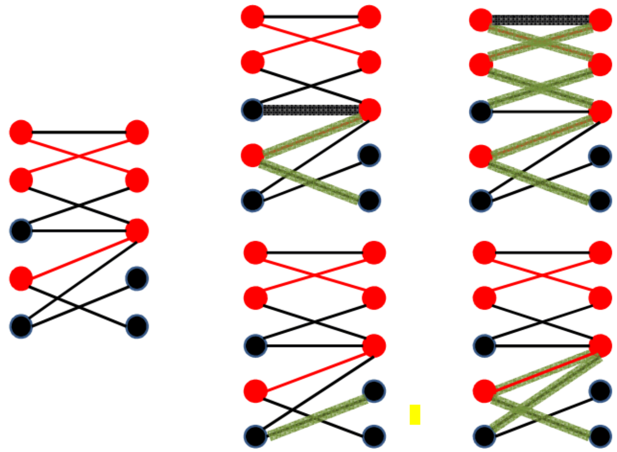
Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen.

  Vorbereitung für ($\Leftarrow$):

  Definition: Sei M ein Matching . Ein Pfad heißt augmentierend oder Verbesserungspfad bezüglich M wenn:

  1. bei dem Pfad sich gematchte und ungematchte Kanten (bezüglich M) abwechseln (wir sagen, dass der Pfad alternierend ist), und
  2. Anfangs- und Endknoten ungematcht sind.



- Matchings in bipartiten Graphen.

($\Leftarrow$): Sei M ein Matching mit $|M| < |A|$.

Wir behaupten: es gibt einen augmentierenden Pfad bezüglich M.

Wenn diese Behauptung gilt, dann können die Endknoten des Pfades gematcht werden. Damit gibt es ein neues Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, und die Aussage folgt.

Wir zeigen nun, dass die Behauptung gilt.

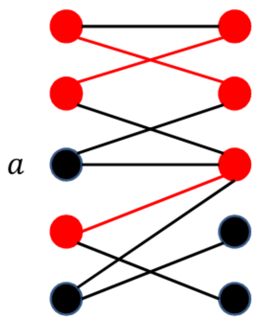
- Matchings in bipartiten Graphen.

Beweis der Behauptung: Da $|M| < |A|$ gibt es $a \in A$ der in M ungematcht ist.

Sei Π_n die Menge der alternierenden Pfaden aus a mit gerader Länge n.

Kann ein Element von Π_n zu einem augmentierend Pfad erweitert werden, dann sind wir fertig.

Sonst: seien A_n, B_n die Knoten von A, B, die in Π_n vorkommen.



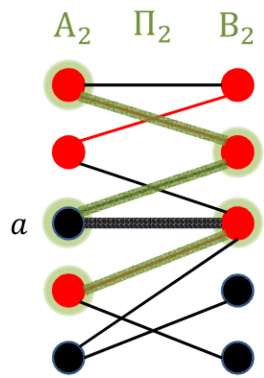
- Matchings in bipartiten Graphen.

Es gilt $|A_n| > |B_n|$

(B_n enthält nur gematchte Knoten und A_n enthält alle entsprechende Matches plus a) .

Mit $|\Gamma(A_n)| \geq |A_n|$ (Annahme) gilt $B_n \subset \Gamma(A_n)$.

Es folgt: mindestens ein Pfad aus Π_n kann zu einem längeren alternierend Pfad erweitert werden ($\Pi_{n+2} \neq \emptyset$).



- Matchings in bipartiten Graphen
  - Aus dem Beweis kann ein Algorithmus zur Berechnung eines perfekten Matchings gewonnen werden: finde iterativ für jeden noch ungematchten Knoten aus A einen augmentierend Pfad.
  - Aus dem Heiratssatz kann direkt das folgende Korollar abgeleitet werden.

    Korollar: Sei G ein k-regulärer bipartiter Graph. Dann enthält G ein perfektes Matching.

- Matchings in bipartiten Graphen

  Stabile Heirat

  - Seien F, M zwei Mengen von je n Frauen und Männern. Eine Heirat ist ein Matching $H \subseteq \{\{f, m\} \mid f \in F, m \in M\}$.
  - Jeder Person hat eine Präferenzliste für die Personen vom anderen Geschlecht (totale Ordnung auf F bzw. M).
  - Eine Heirat ist stabil, wenn alle Personen verheiratet sind und es keine Paare $(a, b), (a', b') \in H$ gibt mit:
    - a bevorzugt b' zu b und
    - b' bevorzugt a zu a'

    (sonst lassen sich a und b' scheiden und heiraten einander).

- Matching

  Stabile Hei

  - Seien F, ... Männern. Eine Hei ... $F, m \in M\}$.
  - Jeder Pe ... rsonen vom anderen ... w. M).
  - Eine Hei ... eiratet sind und es k ... t:
    - a bev
    - b' be

    (sonst la ... ten einande

New

Size

Current page size

Style

5mm

7mm

Orientation

Pages

1

OK Cancel

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen

  Stabile Heirat

  - Seien F, M zwei Mengen von je n Frauen und Männern. Eine Heirat ist ein Matching $H \subseteq \{\{f, m\} \mid f \in F, m \in M\}$.
  - Jeder Person hat eine Präferenzliste für die Personen vom anderen Geschlecht (totale Ordnung auf F bzw. M).
  - Eine Heirat ist stabil, wenn alle Personen verheiratet sind und es keine Paare $(a, b), (a', b') \in H$ gibt mit:
    - a bevorzugt b' zu b und
    - b' bevorzugt a zu a'

    (sonst lassen sich a und b' scheiden und heiraten einander).

21

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen
  - Der Gale-Shapley Algorithmus berechnet eine stabile Heirat.
  - Im Algorithmus werden Personen verlobt oder verheiratet. Eine Verlobung darf gelöst werden, eine Heirat nicht.
  - Am Anfang ist niemand verlobt oder verheiratet.
  - Der folgender Schritt wird iteriert solange es mindestens einen unverlobten Mann b gibt:
    - b macht derjenigen Dame a einen Antrag, die er noch nicht gefragt hatte und er unter diesen Dam en bevorzugt.

      a verlobt sich mit b, wenn sie noch nicht verlobt ist, oder sie b ihrem derzeitigen Verlobten vorzieht.
  - Sind alle Männer verlobt, so heiratet jeder seine Verlobte.

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen

  Satz (Gale, Shapley 1962): Der Algorithmus berechnet in maximal n^2 Schritten eine stabile Heirat.

  Beweis: Der Algorithmus terminiert mit einer Heirat nach höchstens n^2 Schritten.

  Verlobte Frauen bleiben verlobt. Eine Frau verlobt sich nur dann neu, wenn sie sich verbessert. Es folgt: jede Frau verlobt sich höchstens n-mal. Spätestens sind nach n^2 Schritten alle Frauen und damit alle Männer verlobt.

Kapitel IV – Graphen; Matchings

- Matchings in bipartiten Graphen

  Die Heirat ist stabil.

  Durch Widerspruch. Ist die Heirat instabil, dann gibt es $(a, b), (a', b')$ mit: a bevorzugt b' und b' bevorzugt a.

  Da Frauen sich nur verbessern können hat a keinen Antrag von b' erhalten. Der Grund dafür kann nur sein, dass b' sich mit einer Frau verlobt hat, die er zu a vorzieht, und diese Verlobung nicht gelöst wurde. Diese Frau kann aber nur a' sein, im Widerspruch zur Annahme, dass a diejenige ist, die von b' bevorzugt wird.

- Ma[tchings in bipartiten Graphen]

  Die Heirat ist stabil.

  Durch Widerspruch. Ist die Heirat instabil, dann gibt es $(a, b), (a', b')$ mit: a bevorzugt b' und b' bevorzugt a.

  Da Frauen sich nur verbessern können hat a keinen Antrag von b' erhalten. Der Grund dafür kann nur sein, dass b' sich mit einer Frau verlobt hat, die er zu a vorzieht, und diese Verlobung nicht gelöst wurde. Diese Frau kann aber nur a' sein, im Widerspruch zur Annahme, dass a diejenige ist, die von b' bevorzugt wird.

a —— b

a' —— b'

1 2 3

b' a

24

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel V – Algebraische Strukturen

- Algebraische Strukturen
  - **Grundlagen**
  - Gruppen
  - Endliche Körper

2

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- In der Algebra werden abstrakte Operationen (Operationen über eine abstrakte Menge) untersucht, von denen nur bekannt ist, dass sie gewisse Eigenschaften (wie z.B. Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, Idempotenz ...) besitzen.
- Welche Eigenschaften jede Operation hat, wird durch Axiome festgelegt.

3

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Eine abstrakte Algebra kann viele Instanzen haben (konkrete Algebren) , die man erhält, in dem
  - die abstrakte Menge durch konkrete Mengen (z.B. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ...) und
  - die abstrakte Operationen durch konkrete Operationen, die die Axiome erfüllen (z.B. Addition, Multiplikation ...)

  ersetzt werden.
- Alle Sätze, die für eine abstrakte Algebra bewiesen worden sind, gelten für alle ihre Instanzen.

4

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Algebren

  Definition: Eine (konkrete) Algebra besteht aus einer Trägermenge S und einer Menge Φ von Operatoren (oder Operationen) auf S (der Operatorenmenge).

  Ein Operator der Stelligkeit (arity) $m \in \mathbb{N}$ ist eine Abbildung $S^m \rightarrow S$.

5

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Beispiele
  - $\langle \mathbb{N}, +\rangle, \langle \mathbb{Z}, +\rangle, \langle \mathbb{N}, +, *\rangle$ sind Algebren.
  - Sei $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Quadratzahl}\}$.
    $\langle Q, *\rangle$ ist eine Algebra. $\langle Q, +\rangle$ ist keine Algebra.
  - $\langle\{\mathbf{true}, \mathbf{false}\},\ \wedge,\ \vee,\ \neg\rangle$ ist eine Algebra.
  - Sei U eine Menge. $\langle 2^M, \cup, \cap\rangle$ ist eine Algebra.
  - Sei $F(U)$ die Menge aller Abbildungen $U \rightarrow U$.
    $\langle F(U), \circ\rangle$ ist eine Algebra ($\circ$ bezeichnet die Komposition von Funktionen).

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Beispiele
  - $\langle \mathbb{N}, +\rangle, \langle \mathbb{Z}, +\rangle, \langle \mathbb{N}, +, *\rangle$ sind Algebren. n^2
  - Sei $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Quadratzahl}\}$.
    $\langle Q, *\rangle$ ist eine Algebra. $\langle Q, +\rangle$ ist keine Algebra.
  - $\langle\{\mathbf{true}, \mathbf{false}\},\ \wedge,\ \vee,\ \neg\rangle$ ist eine Algebra. $n \rightarrow 2n$
  - Sei U eine Menge. $\langle 2^M, \cup, \cap\rangle$ ist eine Algebra.
  - Sei $F(U)$ die Menge aller Abbildungen $U \rightarrow U$. $n \rightarrow n^2$
    $\langle F(U), \circ\rangle$ ist eine Algebra ($\circ$ bezeichnet die Komposition von Funktionen). $n \rightarrow 4n^2$

$n \rightarrow 2n^2$

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Multiplikationstafeln

  Algebren mit zweistelligen Operatoren lassen sich über ihre Multiplikationstafeln (Operationstafeln) darstellen.

  Beispiel: $\langle\{\mathbf{true}, \mathbf{false}\},\ \wedge,\ \vee\rangle$

∨	T	F
T	T	T
F	T	F

∧	T	F
T	T	F
F	F	F

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Neutrales und inverses Element

  Definition: Sei $\langle S, \circ\rangle$ eine Algebra. Ein Element $e \in S$ heißt linksneutrales (bzw. rechtsneutrales) Element für den Operator $\circ$, falls

  $\forall a \in S\colon\ e \circ a = a$ (bzw. $\forall a \in S\colon\ a \circ e = a$).

  Ein neutrales Element ist ein Element welches sowohl links- als auch rechtsneutral ist.

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Neutrales und inverses Element

  Definition: Sei $\langle S,\circ\rangle$ eine Algebra mit einem neutralen Element e und sei $a \in S$.

  Ein Element $x \in S$ ist ein rechtsinverses (bzw. linksinverses) Element von a, falls $a \circ x = e$ (bzw. $x \circ a = e$).

  Ist x sowohl rechts- als auch linksinverses Element zu a, so heißt es inverses Element zu a.

15

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Neutrales und inverses Element

  Definition: Sei $\langle S,\circ\rangle$ eine Algebra mit einem neutralen Element e und sei $a \in S$.

  Ein Element $x \in S$ ist ein rechtsinverses (bzw. linksinverses) Element von a, falls $a \circ x = e$ (bzw. $x \circ a = e$).

  Ist x sowohl rechts- als auch linksinverses Element zu a, so heißt es inverses Element zu a.

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Neutrales und inverses Element

  Beispiele:

  – Die Algebra $\langle\{a,b\},\circ\rangle$ mit

$\circ$	a	b
a	a	a
b	b	b

  hat rechtsneutrale Elemente a und b, jedoch keine linksneutralen Elemente.

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Neutrales und inverses Element
  - Die neutralen Elemente der Addition bzw. Multiplikation auf den natürlichen/ganzen Zahlen sind 0 bzw. 1.
  - In $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ hat jedes Element x ein inverses Element: $-x$.
  - In $\langle\mathbb{R}\setminus\{0\},*\rangle$ hat jedes Element x ein inverses Element: $1/x$.
  - In $\langle\mathbb{Z}\setminus\{0\},*\rangle$ haben nur die Elemente 1 und -1 ein inverses Element.

Kapitel V – Algebra; Grundlagen

- Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Definition: Eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einem zweistelligen Operator $\circ$ heißt Halbgruppe, falls $\circ$ assoziativ ist, also gilt:

$$\forall a, b, c \in S:\ a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Beispiele:

- $\langle \mathbb{N}, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{N}, * \rangle, \langle \mathbb{Z}, * \rangle, \langle 2^U, \cup \rangle, \langle F(U), \circ \rangle$ sind Halbgruppen.
- $\langle \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}, \rightarrow \rangle$ ist keine Halbgruppe.