Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (21.01.2014)

Date: Tue Jan 21 13:56:41 CET 2014

Duration: 78:04 min

Pages: 47

WS 2013/14

Diskrete Strukturen

Prof. Dr. J. Esparza

Lehrstuhl für Grundlagen der Softwarezuverlässigkeit und theoretische Informatik
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

http://www7.in.tum.de/um/courses/ds/ws1314

Kapitel IV – Graphentheorie

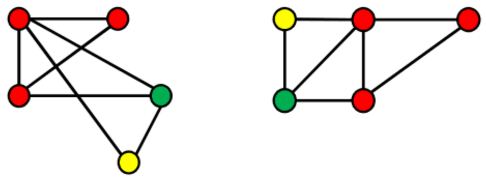
- Graphentheorie
  - Grundlagen
  - Bäume
  - Euler- und Hamiltonkreise
  - **Planarität und Färbungen**
  - Matchings

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

Definition: Ein Graph ist planar, wenn man ihn auf der Ebene ohne Kantenüberschneidungen zeichnen kann.

Eine ebene Darstellung eines Graphen ist eine Darstellung ohne Kantenüberscheneidungen. Wir sprechen von einem ebenen Graphen (eigentlich inkorrekt).

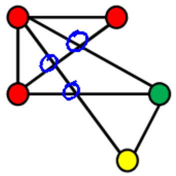


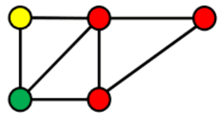
Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

  Definition: Ein Graph ist planar, wenn man ihn auf der Ebene ohne Kantenüberschneidungen zeichnen kann.

  Eine ebene Darstellung eines Graphen ist eine Darstellung ohne Kantenüberscheneidungen. Wir sprechen von einem ebenen Graphen (eigentlich inkorrekt).

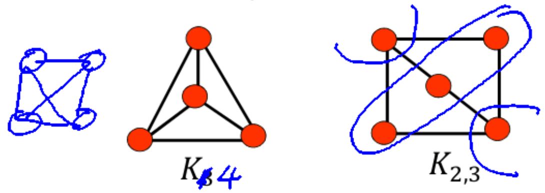




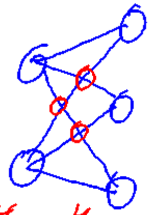
3

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

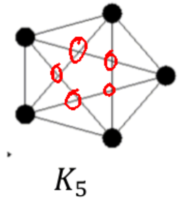


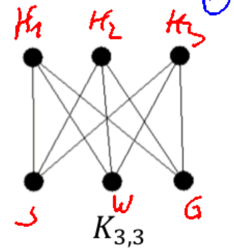
planar



nicht planar

(Beweis kommt später)





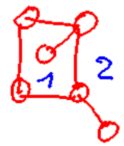
4

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

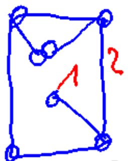
- Planare Graphen

  Satz (Eulersche Polyederformel-EPf): Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ebener Graph. Dann gilt:

$$|R| := \#\text{Gebiete} = |E| - |V| + 2.$$



  Die Gebiete sind die zusammenhängenden Teile der Ebene, die durch das Zerschneiden der Ebene entlang der Kanten entstehen. Das äussere Gebiet zählt man mit.



  Korollar: In jeder planaren Darstellung eines Graphen bleibt die Anzahl der Gebiete gleich.

5

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

$|R| = |E| - |V| + 2$

  Beweis (Eulersche Polyederformel):

  Da G zusammenhängend, gilt $|E| \geq |V| - 1$.

  Durch Induktion über $n = |E| - |V| + 1$.

  Basis: $n = 0$. Mit $|E| = |V| - 1$ ist G ein Baum. Da Bäume keine Kreise enhalten, gilt $|R| = 1$. Es folgt $|R| = 1 = |E| - |V| + 2$.

  Induktionsannahme: für Graphen mit $|E| - |V| + 1 = n$ gilt die EPf.

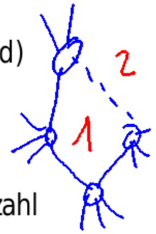
6

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

Schritt: Sei G mit $|E| - |V| + 1 = n + 1$.

Dann ist G kein Baum und muss (da zusammenhängend) einen Kreis enthalten, der zwei Gebiete voneinander trennt.



Wenn wir eine Kante aus dem Kreis löschen, dann verschmelzen wir zwei Gebiete und reduzieren die Anzahl der Gebiete um 1.

Für den entstehenden Graph gilt nach Induktionsannahme die Polyederformel, und somit auch für den Graphen G. □

$|E'| = |E| - 1$

$|R'| = |R| - 1$

IV: $\underbrace{|R'|+1}_{|R|} = \underbrace{|E'|+1}_{|E|} - |V| + 2 \quad | +1$

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

Schritt: Sei G mit $|E| - |V| + 1 = n + 1$.

Dann ist G kein Baum und muss (da zusammenhängend) einen Kreis enthalten, der zwei Gebiete voneinander trennt.

Wenn wir eine Kante aus dem Kreis löschen, dann verschmelzen wir zwei Gebiete und reduzieren die Anzahl der Gebiete um 1.

Für den entstehenden Graph gilt nach Induktionsannahme die Polyederformel, und somit auch für den Graphen G. □

7

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

Korollar 1: Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ Knoten gilt $\boxed{|E| \leq 3|V| - 6}$.

Beweis: Da jedes Gebiet durch mindestens 3 Kanten begrenzt ist und jede Kante höchstens 2 Gebiete begrenzt, gilt $\boxed{3|R|} \leq \boxed{2|E|}$.

Die EPf ergibt $2/3\,|E| \geq \boxed{|R| = |E| - |V| + 2}$. □

Korollar 2: Jeder planare Graph hat einen Knoten mit Grad höchstens 5.

Beweis: Sonst gilt $|E| \geq 3|V|$, im Widerspruch zu Korollar 1.

$\sum_{v \in V}$

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

Satz (Kuratowski): Ein Graph G ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen besitzt, der ein Unterteilungsgraph des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.

Dieser Satz führt sofort zu einem (ineffizienten) Algorithmus für das Planaritätsproblem.

$|V| \cdot 6 \leq \sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

Korollar 3: Der K_5 (5 Knoten, 10 Kanten) ist nicht planar.

$10 \quad 15 - 6 = 9$

Beweis: Für den K_5 gilt $|E| > 3|V| - 6$.

Korollar 4: Der $K_{3,3}$ (6 Knoten, 9 Kanten) ist nicht planar.

Beweis: Durch Widerspruch. $9 \leq 12$

Wenn $K_{3,3}$ planar ist, dann gilt $|R| = 5$ (EPf). $9 - 6 + 2 = 5$

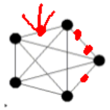
Jedes Gebiet wird von mindestens 4 Kanten begrenzt ($K_{3,3}$ ist bipartit) und so $\boxed{4|R| \leq 2|E|.}$

Mit $|R| = 5$ und $|E| = 9$ folgt $20 \leq 18$. Widerspruch.

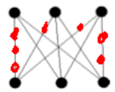
Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Planare Graphen

nicht planar



K_5



$K_{3,3}$

Definition: Ein Unterteilungsgraph eines Graphen G ist ein Graph, der dadurch ensteht, in dem Kanten von G durch Pfade ersetzt werden.

Fakt: Ein Unterteilungsgraph von K_5 oder $K_{3,3}$ ist nicht planar.

Fakt: Ein Graph, der einen Unterteilungsgraphen von K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraphen besitzt, ist nicht planar.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

Satz: Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$.

1858: von Guthrie als Vermutung aufgestellt.

1976: von Appel und Haken bewiesen.
Fallunterscheidung mit 1936 Fällen, geprüft durch Computer.

2005: von Gonthier und Werner im Beweisassistenten Coq formal bewiesen.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

Frage: 7 Praktika werden angeboten. Jedes Studierende muss zwei wählen und absolvieren. Folgende Paare werden von mindestens einem Studierenden gewählt:

(1,2) (1,3) (1,4) (1,7) (2,3) (2,4) (2,5) (2,7)

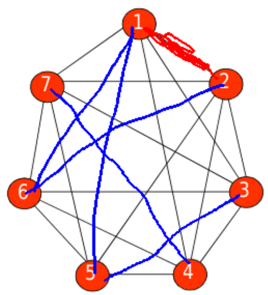
(3,4) (3,6) (3,7) (4,5) (4,6) (5,7) (6,7)

Zwei Praktika dürfen gleichzeitig gehalten werden, wenn kein Studierender an beiden teilnimmt. Wieviele Termine sind notwendig?

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

Der folgende Graph repräsentiert diesen Sachverhalt:



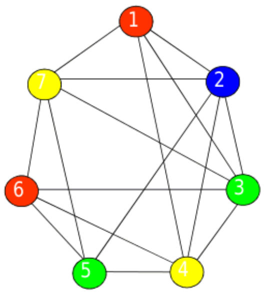
Eine Planung muss berücksichtigen, dass keine über eine Kante verbundenen Praktika zur selben Zeit stattfinden.

Dies entspricht einer Färbung der Knoten (Knotenfärbung), wobei die Farben den Prüfungszeiten entsprechen und adjazente Knoten nicht die gleiche Farbe haben dürfen.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

Bei 4 möglichen Zeiten (rot, blau, grün, gelb) ergibt sich folgende Färbung:



Es gibt keine Färbung mit weniger als 4 Farben.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

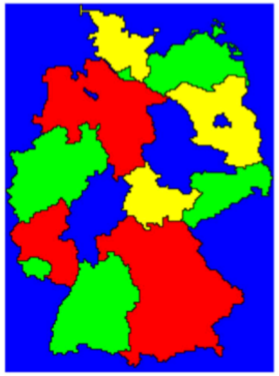
Das klassische Graphfärbungsproblem ist das Färben von Landkarten, bei dem benachbarte Länder unterschiedliche Farben bekommen sollen.

Man nimmt an, dass das Gebiet eines Landes zusammenhängend ist und Länder, die nur an einem Punkt zusammenstossen gleich gefärbt werden dürfen.

Hierbei interessiert die kleinste Anzahl von unterschiedlichen Farben, die benötigt werden.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

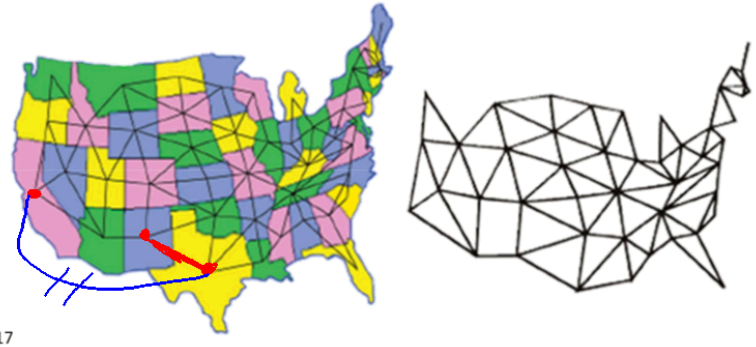


Vierfarbige Färbung der Karte Deutschlands

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Reduktion zu Knotenfärbung:



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

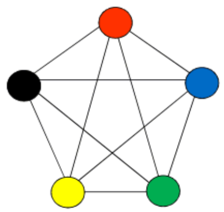
  Definition: Eine Knotenfärbung (vertex colouring) eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c: V \to [k]$ so dass gilt: $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$.

  Die chromatische Zahl (chromatic number) $\chi(G)$ von G ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Fakt: Der K_n hat chromatische Zahl n.



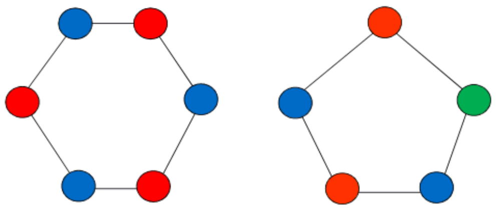
Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Fakt:

  – Kreise gerader Länge haben chromatische Zahl 2.

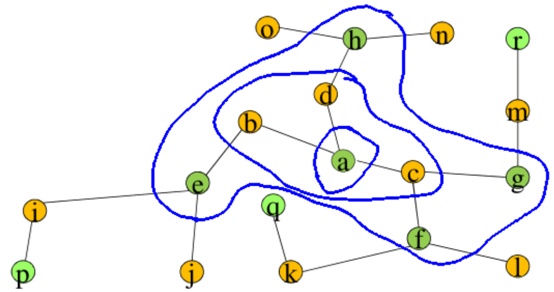
  – Kreise ungerader Länge haben chromatische Zahl 3.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

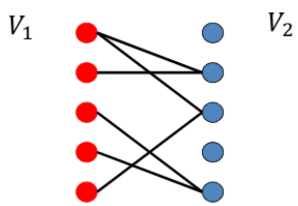
  Fakt: Bäume mit mindestens 2 Knoten haben chromatische Zahl 2.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Fakt: Bipartite Graphen mit mindestens eine Kante haben chromatische Zahl 2.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Satz: Für jeden planaren Graphen G gilt $\boxed{\chi(G) \leq 5.}$

  Beweis: Durch Induktion über n= $|V|$.

  Basis: $n = 1$. Trivial.

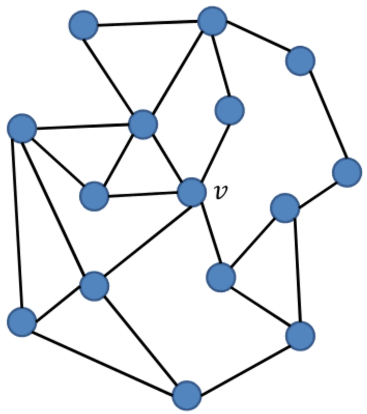
  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2). Entferne v und seine adjazenten Kanten, sei G' der resultierender Graph. Aus der Ind.Vor. folgt, dass G' eine 5-Färbung besitzt.

  Fall 1. Die Nachbarn von v sind mit 4 oder weniger Farben gefärbt. Färbe dann v mit einem der übrigen Farben.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2).

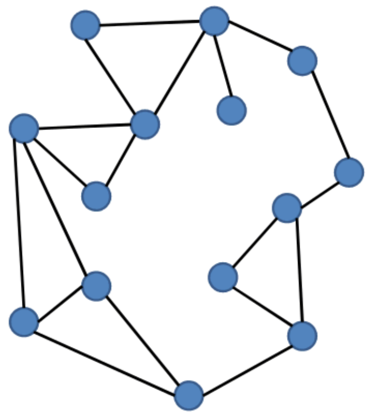


Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

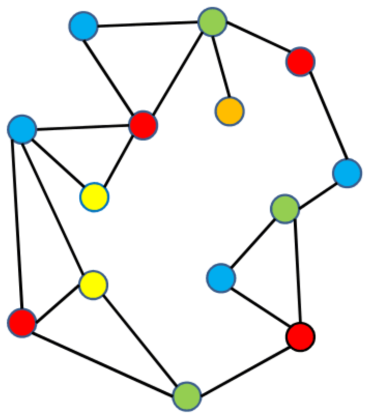
  Schritt: $n > 1$. Sei $v \in V$ mit Grad höchstens 5 (Korollar 2).

  Entferne v und seine adjazenten Kanten, sei G' der resultierender Graph.



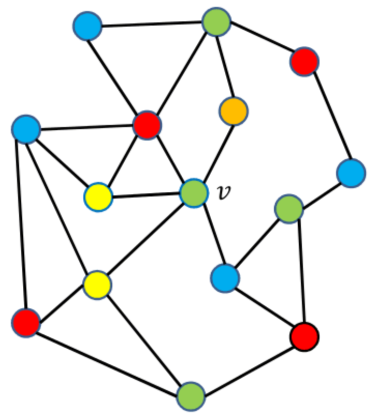
Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen
- Fall 1. Die Nachbarn von v sind mit höchstens 4 verschiedenen Farben gefärbt.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

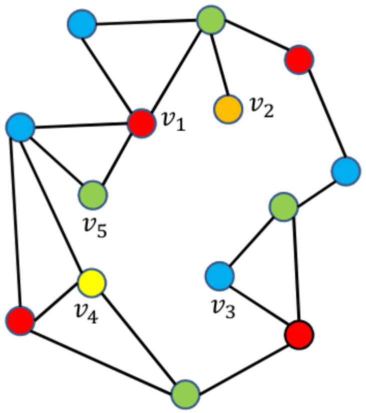
- Färbung von Graphen
- Fall 1. Die Nachbarn von v sind mit höchstens 4 verschiedenen Farben gefärbt. Dann nehmen wir für v eine der übrigen Farben.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

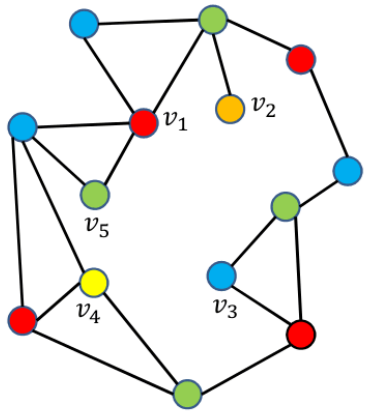
  Fall 2. Die Nachbarn $v_1, \ldots, v_5$ von v (im Uhrzeigesinn) sind mit 5 verschiedenen Farben gefärbt. Wir ändern die Färbung, so dass sie mit nur 4 Farben gefärbt werden.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

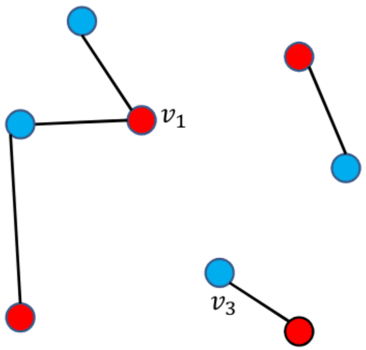
  Sei $H_{1,3}$ der von den Knoten mit Farben 1 und 3 induzierten Teilgraphen von G.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

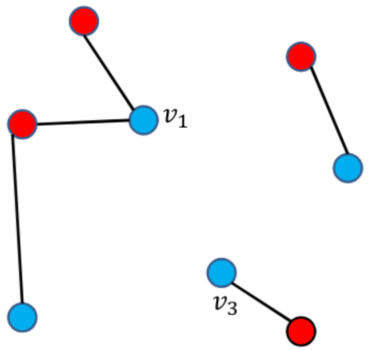
  Sei $H_{1,3}$ der von den Knoten mit Farben 1 und 3 induzierten Teilgraphen von G.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

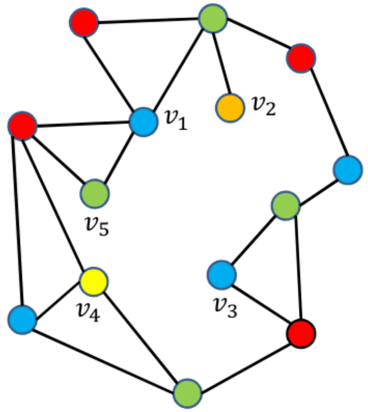
  Wir vertauschen die Farben 1 und 3 in der Komponente, die v_1 enthält.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

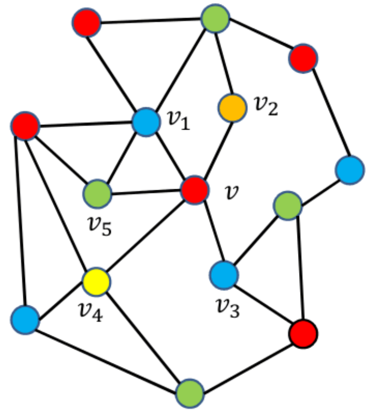
  Das ergibt eine neue Färbung von G', in der die Nachbarn von v mit nur 4 Farben gefärbt sind.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

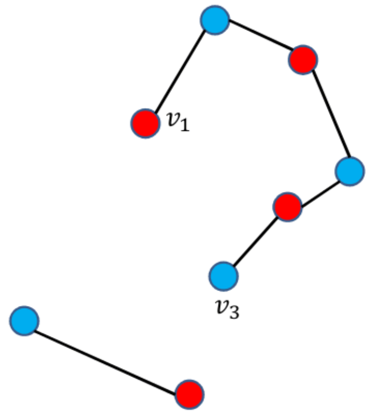
  Wir färben v mit der übrigen Farbe.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Fall 2.2. $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.

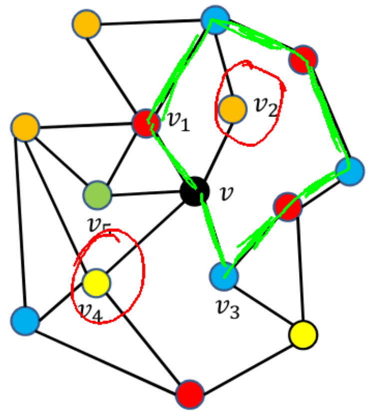


Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Fall 2.2. $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$.

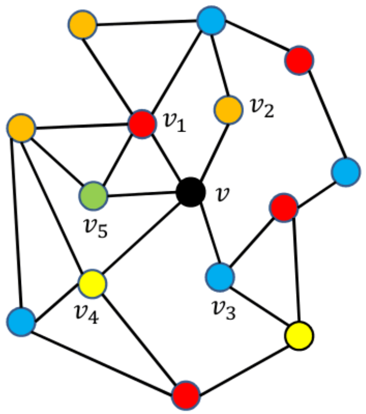
  Dann befinden sich die Knoten v_2 und v_4 auf unterschiedlichen Seiten des Kreises $(v, v_1, \ldots, v_3, v)$.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

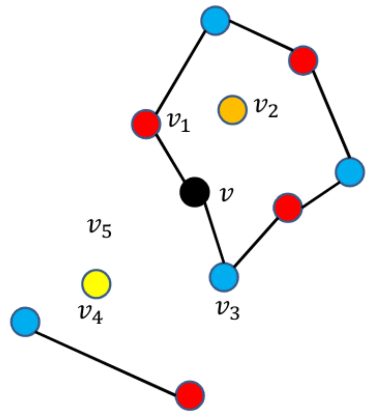
  Fall 2.2. $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$. Dann befinden sich die Knoten v_2 und v_4 auf unterschiedlichen Seiten des Kreises $(v, v_1, \ldots, v_3, v)$.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

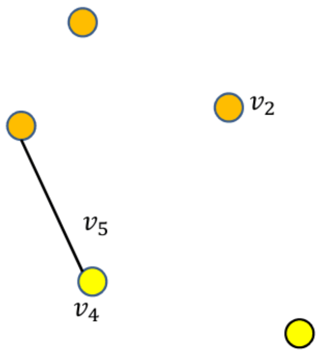
  Fall 2.2. $H_{1,3}$ enthält einen Pfad $(v_1, \ldots, v_3)$. Dann befinden sich die Knoten v_2 und v_4 auf unterschiedlichen Seiten des Kreises $(v, v_1, \ldots, v_3, v)$.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

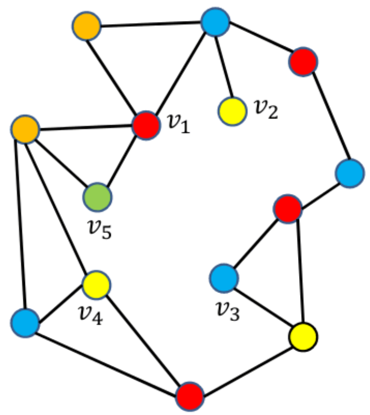
  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.2 vorgehen.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

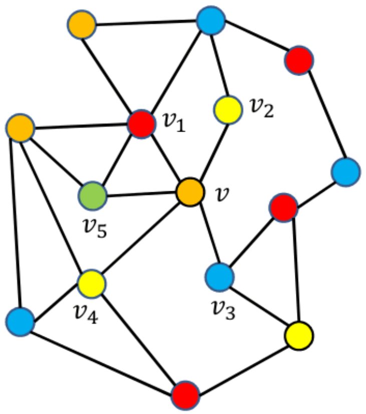
  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.2 vorgehen.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.2 vorgehen.



Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Satz: Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$.

  1858: von Guthrie als Vermutung aufgestellt.

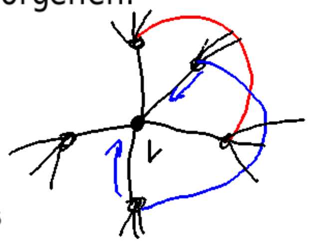
  1976: von Appel und Haken bewiesen.
  Fallunterscheidung mit 1936 Fällen, geprüft durch Computer.

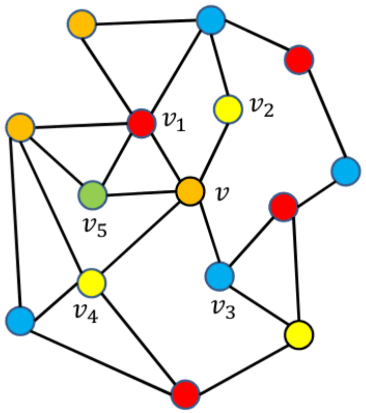
  2005: von Gonthier und Werner im Beweisassistenten Coq formal bewiesen.

Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Damit enthält $H_{2,4}$ keinen Pfad $(v_2, \ldots, v_4)$, und wir können wie im Fall 2.2 vorgehen.





Kapitel IV – Graphen; Eigenschaften

- Färbung von Graphen

  Satz: Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$.

  1858: von Guthrie als Vermutung aufgestellt.

  1976: von Appel und Haken bewiesen.
  Fallunterscheidung mit 1936 Fällen, geprüft durch Computer.

  2005: von Gonthier und Werner im Beweisassistenten Coq formal bewiesen.