Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (09.01.2014)

Date: Thu Jan 09 10:17:35 CET 2014

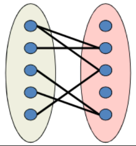
Duration: 86:00 min

Pages: 31

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Bipartite Graphen

  Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, wenn es eine Partitionierung V_1, V_2 von V gibt $(V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset)$ so dass für alle $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt: $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ oder $v_1 \in V_2$ und $v_2 \in V_1$.



Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Bipartite Graphen
  - Bipartite Graphen werden auch in der Form $G = (V_1, V_2, E)$ geschrieben.
  - Ein bipartiter Graph $G = (V_1, V_2, E)$ heißt vollständig, falls $E = \{\{u, v\} \mid u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$.
  - Notation: $K_{m,n}$ mit $m = |V_1|$, $n = |V_2|$

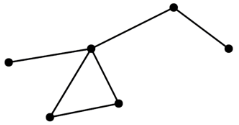
Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Wege, Pfade, Kreise
  - Ein Weg der Länge k in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine nichtleere Folge $(v_0, \ldots, v_k)$ von Knoten aus V, so dass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i = 0, \ldots, k-1$. (Beachte: (v_0) ist ein Weg der Länge 0.)
  - Ein (einfacher) Pfad in G ist ein Weg in G, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.
  - Ein (einfacher) Kreis der Länge k $(k \geq 3)$ in G ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_k)$ in dem $v_0, \ldots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind und $v_0 = v_k$.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Wege, Pfade, Kreise

  Beispiel: Graph mit einem Weg der Länge 6, der aber kein Pfad ist.



Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Wege, Pfade, Kreise
  - Ein Weg der Länge k in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine nichtleere Folge $(v_0, \dots, v_k)$ von Knoten aus V, so dass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i = 0, \dots, k-1$. (Beachte: (v_0) ist ein Weg der Länge 0.)
  - Ein (einfacher) Pfad in G ist ein Weg in G, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.
  - Ein (einfacher) Kreis der Länge k $(k \geq 3)$ in G ist ein Weg $(v_0, \dots, v_k)$ in dem $v_0, \dots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind und $v_0 = v_k$.

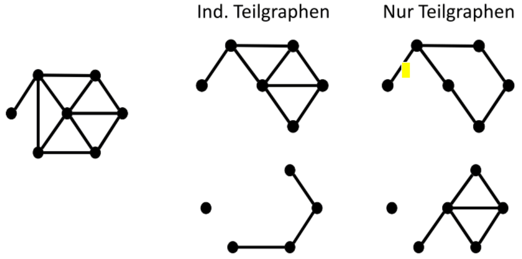
Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- (Induzierte) Teilgraphen
  - Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt Teilgraph eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, falls $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$.
  - Gilt $E_H = E_G \cap \{ \{u, v\} \mid u \in V_H \wedge v \in V_H \}$ so nennt man H einen induzierten Teilgraphen von G und schreibt $H = G[V_H]$.

  Konstruktion von induzierten Teilgraphen: entferne Knoten zusammen mit allen dazugehörigen Kanten.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- (Induzierte) Teilgraphen



Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Nachbarschaft und Grad

  Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $v \in V$.

  – Die Nachbarschaft $\Gamma(v)$ von v ist die Menge der Knoten $u \in V$ mit $\{v, u\} \in E$.

  – Der Grad $\deg(v)$ von v bezeichnet die Anzahl von Nachbarn von v, d.h. $\deg(v) = |\Gamma(v)|$.

  – Wenn alle Knoten von G denselben Grad k haben, dann ist G k-regulär.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Nachbarschaft und Grad

  Satz (Handshaking Theorem): Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

  Beweis : Auf der linken Seite der Gleichung wird jede Kante genau zweimal gezählt, nämlich für die beiden Endknoten der Kante. Auf der rechten Seite wird jede Kante auch zweimal gezählt.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Nachbarschaft und Grad

  Korollar: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

  Beweis : Sonst wäre $\sum_{v \in V} \deg(v)$ ungerade und damit $\sum_{v \in V} \deg(v) \neq 2|E|$, im Widerspruch zum Satz.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Erreichbarkeit und Zusammenhang

  – Sei $G = (V, E)$. Ein Knoten $u \in V$ ist erreichbar von $v \in V$, falls G einen Pfad $(u, \dots, v)$ hat.

  – Die Erreichbarkeitsrelation $R_G \subseteq V \times V$ ist definiert durch: $(u, v) \in R$ gdw. v ist erreichbar von u.

  – Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf V.

  – Bemerkung: Wenn E als symmetrische Relation aufgefasst wird, dann gilt $R_G = E^*$.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Erreichbarkeit und Zusammenhang
  - Die von den Äquivalenzklassen induzierten Teilgraphen heißen die (Zusammenhangs)komponenten von G,
  - G heißt zusammenhängend, wenn er nur eine Komponente hat (jeder Knoten ist aus jedem anderen Knoten erreichbar).

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

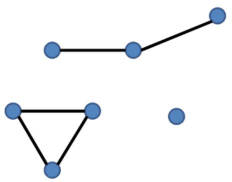
- Erreichbarkeit und Zusammenhang
  - Die von den Äquivalenzklassen induzierten Teilgraphen heißen die (Zusammenhangs)komponenten von G,
  - G heißt zusammenhängend, wenn er nur eine Komponente hat (jeder Knoten ist aus jedem anderen Knoten erreichbar).

35
Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Erreichbarkeit und Zusammenhang

  Beispiel: Ein Graph bestehend aus drei Zusammenhangskomponenten



Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Zusammenhangskomponenten

  Satz: Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens $|V| - |E|$ viele Zusammenhangskomponenten.

  Beweis: Durch Induktion über $|E|$.

  Basis: $|E| = 0$. Dann gibt es $|V| = |V| - |E|$ Komponenten.

  Schritt: $|E| > 0$. Nehme eine Kante e weg. Der resultierende Graph hat mindestens $|V| - (|E| - 1)$ Komponenten (IndVor). Füge nun e erneut hinzu. Das reduziert die Anzahl der Komponenten um höchstens eins. G hat also mindestens $|V| - (|E| - 1) - 1 = |V| - |E|$ Komponenten. □

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Zusammenhangskomponenten

Korollar: Für jeden zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ gilt: $|E| \geq |V| - 1$.

Beweis: Da ein zusammenhängender Graph aus genau einer Komponente besteht, folgt aus dem vorherigen Satz, dass $|V| - |E| \leq 1$. □

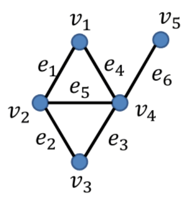
Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Adjazenz- und Inzidenzmatrix
  - Neben den bisherigen Darstellungen können Graphen in Form von Adjazenzmatrizen und Inzidenzmatrizen dargestellt werden.
  - Bei Nummerierung der Knoten $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ ist die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$ die symmetrische $n \times n$-Matrix A mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, u_k\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Adjazenz- und Inzidenzmatrix



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph (in Zeichen $G \cong G'$), falls es eine Bijektion $h: V \to V'$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \leftrightarrow \{h(u), h(v)\} \in E'$$

Die Abbildung h ist dann ein Homomorphismus (technische Bezeichnung einer Umbenennung) der Knotenmenge V.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen

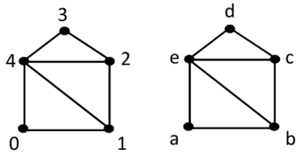
Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph (in Zeichen $G \cong G'$), falls es eine Bijektion $h: V \to V'$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall u, v \in V: \{u, v\} \in E \leftrightarrow \{h(u), h(v)\} \in E'$$

Die Abbildung h ist dann ein Homomorphismus (technische Bezeichnung einer Umbenennung) der Knotenmenge V.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Isomorphe (strukturgleiche) Graphen



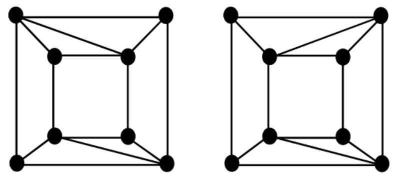
Die Abbildung ist: 0 1 2 3 4
a b c d e

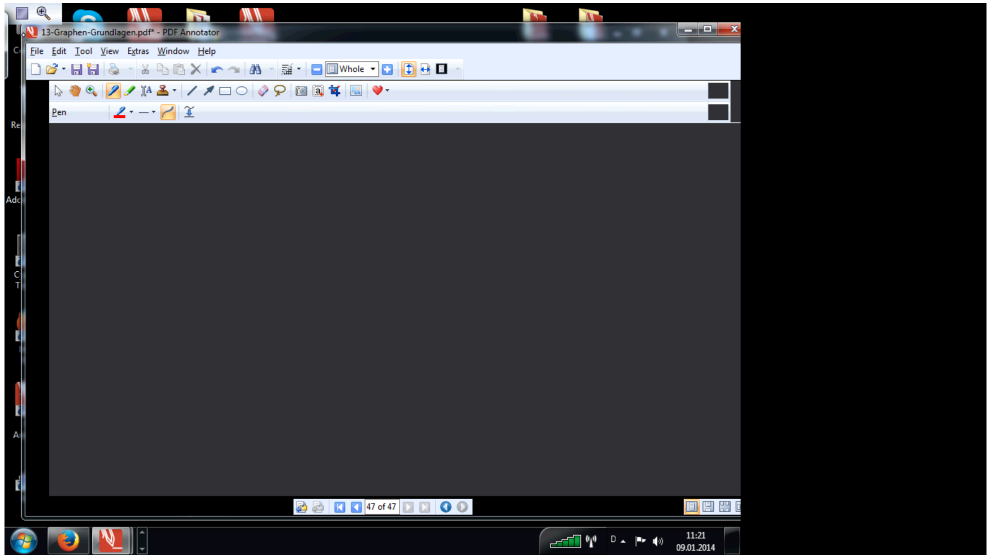
Die Graphen sind offensichtlich isomorph.

Kapitel IV – Graphen; Grundlagen

- Isomorphe Graphen

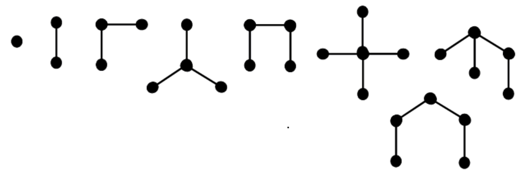
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph?





Kapitel IV – Graphen; Bäume

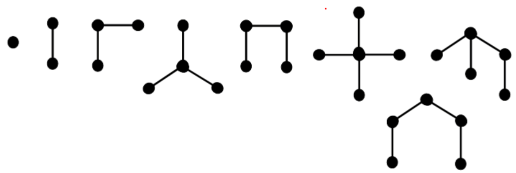
- Bäume mit höchstens 5 Knoten (bis auf Isomorphie)



Kapitel III – Graphen; Bäume

- Wälder

  Definition: Ein Graph, dessen (Zusammenhangs-) Komponenten jeweils Bäume sind, heißt Wald.



Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Eigenschaften von Bäumen

  Satz: Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ enthält mindestens zwei Blätter.

  Beweis (informell): Nehme eine beliebige Kante und laufe nach „links“ und “rechts“ so lang wie möglich. Da man nicht in einen Kreis geraten kann endet man irgendwann in zwei verschiedenen Blättern. □

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Eigenschaften von Bäumen

Satz: Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $v \in V$ ein Blatt, so ist der Graph $T[V \setminus \{v\}]$ ebenfalls ein Baum.

Beweis: Durch Wegnahme eines Blattes bleibt der Baum kreisfrei. Da Pfade zwischen beliebigen Knoten u und w mit $u \neq v \neq w$ erhalten bleiben, ist $T[V \setminus \{v\}]$ auch zusammenhängend. □

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Eigenschaften von Bäumen

Satz: Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $v \in V$ ein Blatt, so ist der Graph $T[V \setminus \{v\}]$ ebenfalls ein Baum.

Beweis: Durch Wegnahme eines Blattes bleibt der Baum kreisfrei. Da Pfade zwischen beliebigen Knoten u und w mit $u \neq v \neq w$ erhalten bleiben, ist $T[V \setminus \{v\}]$ auch zusammenhängend. □

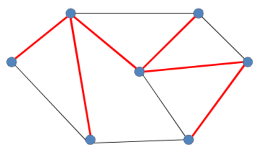
7

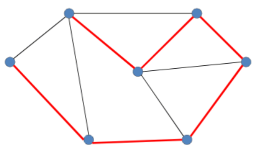
Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Eigenschaften von Bäumen

Definition: Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum ist und $V' = V$.





Kapitel IV – Graphen; Bäume

- Eigenschaften von Bäumen

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $G = (V, E)$ ist ein Baum

(2) Je zwei Knoten $u, v \in V$ sind durch genau einen Pfad verbunden

(3) G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.