

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (19.12.2013)

Date: Thu Dec 19 10:17:14 CET 2013

Duration: 95:56 min

Pages: 48

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

Beispiel für  $n = 5$  und  $k = 4$ :

$\{\{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$	$\{\{1,5\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$
$\{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}\}$	$\{\{1\}, \{2,5\}, \{3\}, \{4\}\}$
$\{\{1\}, \{2\}, \{2,4\}, \{5\}\}$	$\{\{1\}, \{2\}, \{3,5\}, \{4\}\}$
$\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4,5\}\}$
$\{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$	
$\{\{1,4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}\}$	

21

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

**Klasse 1:** alle Partitionen, in denen sich das Element  $s_n$  alleine in einem Block befindet.

Dann müssen die Elemente  $s_1, \dots, s_{n-1}$  auf die übrigen  $k - 1$  Blöcke verteilt werden.

Jede Verteilung ist eine  $(k - 1)$ -Partitionierung von  $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ .

Es gibt also genau  $S_{n-1, k-1}$   $k$ -Partitionen der Klasse 1.

26

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

Anzahl der  $k$ -Partitionen einer  $n$ -elementigen Menge

=

Anzahl der Möglichkeiten,  $n$  unterscheidbare Objekte in  $k$  gleiche Fächer zu verteilen (jedes Fach bekommt mindestens ein Objekt!).

22

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die **Stirlingzahlen** der **ersten** Art  
Es gibt  $n!$  Permutationen.  
Die Komposition  $\pi \circ \pi'$  zweier Permutationen ergibt wieder eine Permutation.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\pi \circ \pi' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

31

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die **Stirlingzahlen** der **ersten** Art

Zyklen einer Permutation:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

1,5,2,8 bildet einen **Zyklus** der Länge 4, d.h.

$$\pi(\pi(\pi(\pi(1)))) = 1$$

3 und 9 sind **Fixpunkte** von  $\pi$  (sie werden auf sich selber abgebildet). Wir interpretieren sie als **Zyklen der Länge 1**.

32

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die **Stirlingzahlen** der **ersten** Art
  - Definition:** Ein **Zyklus**  $(i_1, \dots, i_t)$  einer Permutation  $\pi$  ist eine Folge  $i_1, \dots, i_t$ , wobei
    - $\pi(i_j) = i_{j+1}$  für alle  $1 \leq j < t$  gilt, und
    - $\pi(i_t) = i_1$  ist.

33

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

## Kapitel III – Kombinatorik

Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Zyklen:  $(1, 5, 2, 8)$ ,  $(3)$ ,  $(4, 6, 7)$ ,  $(9)$ ,  $(10, 11)$

**Fakt:** Eine Permutation ist durch ihre Zyklen charakterisiert (d.h. Permutationen mit denselben Zyklen sind gleich).

34

## Kapitel III – Kombinatorik

Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Zyklen:  $(1, 5, 2, 8)$ ,  $(3)$ ,  $(4, 6, 7)$ ,  $(9)$ ,  $(10, 11)$

**Fakt:** Eine Permutation ist durch ihre Zyklen charakterisiert (d.h. Permutationen mit denselben Zyklen sind gleich).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11  
5 8 3 6 2 7 4 1 9 10

34

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die **Stirlingzahlen** der **ersten** Art
  - Die Anzahl Permutationen mit  $k$  Zyklen wird durch die sogenannten **Stirlingzahlen erster Art** angegeben und mit  $s_{n,k}$  oder  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  bezeichnet.
  - Beispiel für  $n = 4$  und  $k = 3$ :

$$\{(1), (2\ 3), (4)\} \quad \{(1\ 4), (2), (3)\}$$

$$\{(1\ 2), (3), (4)\} \quad \{(1), (2\ 4), (3)\}$$

$$\{(1\ 3), (2), (4)\} \quad \{(1), (2), (3\ 4)\}$$

Es gilt also:  $s_{4,3} = 6$

35

## Kapitel III – Kombinatorik

Permutationen mit  
 $n = 3$  und  $k = 3$

$\{(1), (2), (3)\}$

Permutationen mit  
 $n = 3$  und  $k = 2$

$\{(1), (2\ 3)\}$

$\{(1\ 2), (3)\}$

$\{(1\ 3), (2)\}$

38

Permutationen mit  
 $n = 4$  und  $k = 3$

$\{(1\ 4), (2), (3)\}$

$\{(1), (2\ 4), (3)\}$

$\{(1), (2), (3\ 4)\}$

$\{(1), (2\ 3), (4)\}$

$\{(1\ 2), (3), (4)\}$

$\{(1\ 3), (2), (4)\}$

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der ersten Art

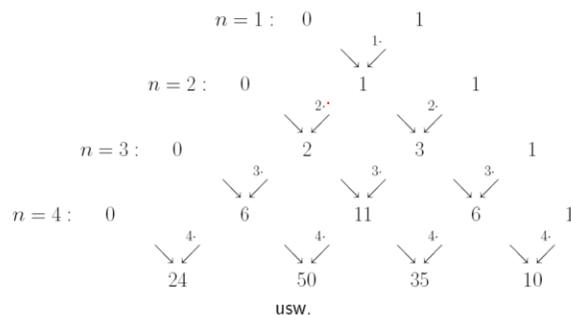
**Satz:** Die Stirlingzahlen  $s_{n,k}$  der ersten Art erfüllen die folgende **Rekursionsgleichung**:

$$s_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n = 0 \\ 0 & \text{falls } k = 0, n > 0 \\ 0 & \text{falls } k > 0, k > n \\ s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} & \text{falls } k > 0, k \leq n \end{cases}$$

39

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der ersten Art



40

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der ersten Art

**Satz:** Die Stirlingzahlen  $s_{n,k}$  der ersten Art erfüllen die folgende **Rekursionsgleichung**:

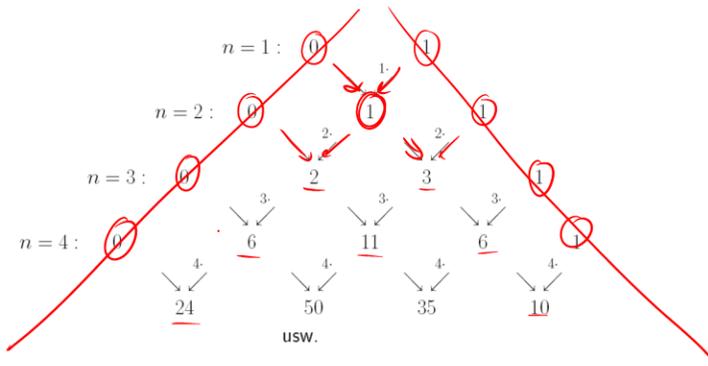
$$s_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n = 0 \\ 0 & \text{falls } k = 0, n > 0 \\ 0 & \text{falls } k > 0, k > n \\ s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} & \text{falls } k > 0, k \leq n \end{cases}$$

*(Handwritten red annotations: a circle around  $s_{n-1,k}$ , an arrow pointing to  $(n-1)$ , and an arrow pointing to  $s_{n-1,k-1}$ .)*

39

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die **Stirlingzahlen** der **ersten Art**



40

## Kapitel III – Kombinatorik

- Ungeordnete Zahlpartitionen
  - Eine  **$k$ -Zahlpartition** einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist eine **Multimenge**  $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  von **positiven** natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

**Beispiel.** Die Zahl 5 hat folgende Zahlpartitionen:

$\{1,1,1,1,1\}$     $\{2,1,1,1\}$     $\{2,2,1\}$     $\{3,1,1\}$   
 $\{3,2\}$     $\{4,1\}$     $\{5\}$

D.h.: 5 hat eine 5-Partition, eine 4-Partition, zwei 3-Partitionen, zwei 2-Partitionen und eine 1-Partition.

41

## Kapitel III – Kombinatorik

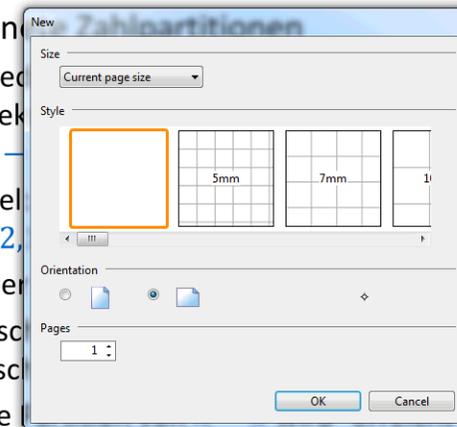
- Ungeordnete Zahlpartitionen
  - Wird jedes Element aus einer  $k$ -Zahlpartition von  $n$  um Eins dekrementiert, erhält man eine  $m$ -Zahlpartition von  $n - k$ .
  - Beispiel: aus  $\{3,2,2,1\}$  (4-Zahlpartition von 8) erhält man  $\{2,1,1\}$  (3-Zahlpartition von 4).
  - Darüber hinaus:
    - Verschiedene  $k$ -Partitionen von  $n$  ergeben verschiedene Partitionen von  $n - k$
    - Jede Partition von  $n - k$  wird "erreicht".

42

## Kapitel III – Kombinatorik

- Ungeordnete Zahlpartitionen
  - Wird jedes Element aus einer  $k$ -Zahlpartition von  $n$  um Eins dekrementiert, erhält man eine  $m$ -Zahlpartition von  $n - k$ .
  - Beispiel: aus  $\{3,2,2,1\}$  (4-Zahlpartition von 8) erhält man  $\{2,1,1\}$  (3-Zahlpartition von 4).
  - Darüber hinaus:
    - Verschiedene  $k$ -Partitionen von  $n$  ergeben verschiedene Partitionen von  $n - k$
    - Jede Partition von  $n - k$  wird "erreicht".

42



## Kapitel III – Kombinatorik

### • Ungeordnete Zahlpartitionen

**Satz:** Die Anzahl  $P_{n,k}$  der ungeordneten  $k$ -Partitionen einer Zahl  $n$  gilt erfüllt folgende Rekursionsgleichung:

$$P_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n = 0 \\ 0 & \text{falls } k = 0, n > 0 \\ 0 & \text{falls } k > 0, k > n \\ \sum_{i=0}^k P_{n-k,i} & \text{falls } k > 0, k \leq n \end{cases}$$

43

## Kapitel III – Kombinatorik

### • Geordnete Zahlpartitionen

- Wir nehmen nun an, dass die gesuchten  $k$ -Zahlpartitionen **geordnet** sein sollen, d.h.

$$4 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2$$

lässt sich durch **drei** unterschiedliche 2-Partitionen darstellen.

- Entspricht das Problem: wie viele Möglichkeiten gibt es,  $n$  Euro (nicht unterscheidbar) unter  $k$  Kinder (unterscheidbar) zu verteilen, **wenn kein Kind leer ausgehen soll.**

44

## Kapitel III – Kombinatorik

### • Geordnete Zahlpartitionen

- Wir nehmen nun an, dass die gesuchten  $k$ -Zahlpartitionen **geordnet** sein sollen, d.h.

lässt sich durch **drei** unterschiedliche 2-Partitionen darstellen.

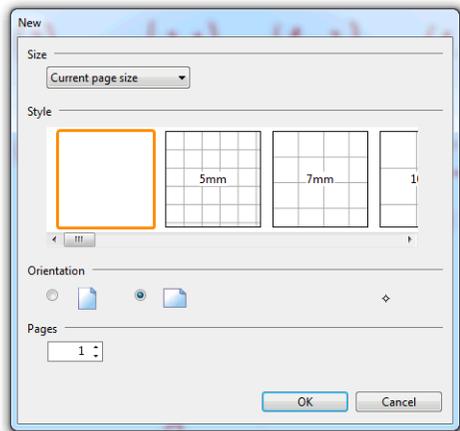
- Entspricht das Problem: wie viele Möglichkeiten gibt es,  $n$  Euro (nicht unterscheidbar) unter  $k$  Kinder (unterscheidbar) zu verteilen, **wenn kein Kind leer ausgehen soll.**

44

2	(2)	(1, 1)	-	$2 = 2^1$	
3	(3)	(2, 1)	(1, 2)	(1, 1, 1)	- 4
4	(4)	(3, 1)	(1, 3)	(2, 2)	
	(2, 1, 1)	(1, 2, 1)	(1, 1, 2)		- 8
5	(1, 1, 1, 1)				- 16

$n=2$      $(2)$      $(1, 1)$      $- 2$   
 $n=3$      $(3)$      $(2, 1)$      $(1, 2)$      $(1, 1, 1)$      $- 4$   
 $n=4$      $(4)$      $(3, 1)$      $(1, 3)$      $(2, 2)$   
            $(2, 1, 1)$      $(1, 2, 1)$      $(1, 1, 2)$      $- 8$   
            $(1, 1, 1, 1)$   
 $n=5$      $2^{n-1}$      $- 16$

$n=2$      $(2)$      $(1, 1)$      $- 2$   
 $n=3$      $(3)$      $(2, 1)$      $(1, 2)$      $(1, 1, 1)$      $- 4$   
 $n=4$      $(4)$      $(3, 1)$      $(1, 3)$      $(2, 2)$   
            $(2, 1, 1)$      $(1, 2, 1)$      $(1, 1, 2)$      $- 8$   
            $(1, 1, 1, 1)$   
 $n=5$      $2^{n-1}$      $- 16$



## Kapitel III – Kombinatorik

- Geordnete Zahlpartitionen
  - Da jede Partition  $n = x_1 + \dots + x_k$  in der Form
 
$$n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{x_1} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{x_2} + \dots + \underbrace{1 + \dots + 1}_{x_k}$$
 geschrieben werden kann, wird jede geordnete Zahlpartition eindeutig durch die "+" bestimmt, die die  $x_i$  trennen.
  - Die Anzahl der  $k$ -Partitionen ist damit gleich der Anzahl von Möglichkeiten,  $k-1$  +-Zeichen aus den insgesamt  $n-1$  +-Zeichen auszuwählen.

45

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

## Kapitel III – Kombinatorik

- Geordnete Zahlpartitionen
  - Satz:** Die Anzahl der geordneten  $k$ -Partitionen von  $n$  ist gleich
 
$$\binom{n-1}{k-1}$$
  - Die Anzahl aller geordneten Partitionen von  $n$  ist gleich
 
$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

46

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München



## • Geo

Satz. Die Anzahl der geordneten  $k$ -Partitionen von  $n$  ist gleich

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Die Anzahl aller geordneten Partitionen von  $n$  ist gleich

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

46

## Kapitel III - Kombinatorik

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - **Bälle und Urnen**

2



15

## Kapitel III – Kombinatorik

- Die bisher betrachteten Zählprobleme sind Spezialfälle von Abzählproblemen der Gestalt:

“Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten,  
 $n$  Bälle auf  $k$  Urnen zu verteilen“

- Bei der Verteilung kommt es darauf an, ob die Bälle und Urnen als unterscheidbar angesehen werden.
- Zusätzlich können Forderungen an die maximale/minimale Menge von Bällen pro Urne gestellt werden:
  - Höchstens/mindestens/genau ein Ball pro Urne.
  - Äquivalent: die Abbildung Bälle  $\rightarrow$  Urne ist injektiv, surjektiv, bijektiv.

3

## Kapitel III – Kombinatorik

- Unterscheidbar oder ununterscheidbar?  
Wie viele Möglichkeiten gibt es
  - zehn Filme auf drei DVD-Disks zu verteilen?
  - zehn Fußball-WM Spiele auf vier Austragungsorte zu verteilen?
  - zehn Murmeln in fünf Päckchen aufzuteilen?
  - zehn Euro unter sechs Kinder zu verteilen?

4

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
$B$ untersch. $U$ untersch.	$m^n$	$\begin{cases} m^n, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$m! S_{n,m}$	$\begin{cases} n!, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
$B$ gleich $U$ untersch.	$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
$B$ untersch. $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$S_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
$B$ gleich $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$P_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	beliebig	injektiv
$B$ untersch. $U$ untersch.	$m^n$	$\begin{cases} m^n, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

- **Beliebig.** Für jeden Ball kommen alle  $m$  Urnen in Frage. Die Produktregel ergibt  $m^n$ .
- **Injektiv.** Für den ersten Ball kommen  $m$  Urnen in Frage, für den zweiten  $m - 1$  (Injektivität), für den dritten  $m - 2$ , etc. Die Produktregel ergibt  $m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1) = m^n$

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	surjektiv
$B$ untersch. $U$ untersch.	$m! S_{n,m}$

- Eine Verteilungen kann in zwei Schritten erzeugt werden:
  - Berechne eine geordnete  $m$ -Partition von  $B$ .
  - Ordne jede Zahl der Partition einer Urne zu.

Es gibt  $S_{n,m}$  Partitionen. Für jede Partition gibt es  $m!$  Zuordnungen. Die Produktregel ergibt  $m! S_{n,m}$ .

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
$B$ untersch. $U$ untersch.	$m^n$	$\begin{cases} m^n, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$m! S_{n,m}$	$\begin{cases} n!, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
$B$ gleich $U$ untersch.	$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
$B$ untersch. $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$S_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$
$B$ gleich $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$	$\begin{cases} 1, m \geq n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$	$P_{n,m}$	$\begin{cases} 1, m = n \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	beliebig
$B$ untersch. $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m S_{n,k}$

- Da Bälle unterscheidbar sind, entspricht jede Zuordnung der Bälle zu  $k$  Urnen einer **geordneten  $k$ -Partition der Bälle**.

8

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	beliebig
$B$ gleich $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$

- Jede Belegung der Urnen wird **eindeutig** durch die **Anzahl der Bälle in den Urnen** bestimmt.  
Die Anzahl der Möglichkeiten ist damit die Anzahl der ungeordneten Partitionen der Zahl  $n$ .

9

## Kapitel III – Kombinatorik

$ B  = n,$ $ U  = m$	beliebig
$B$ gleich $U$ gleich	$\sum_{k=1}^m P_{n,k}$

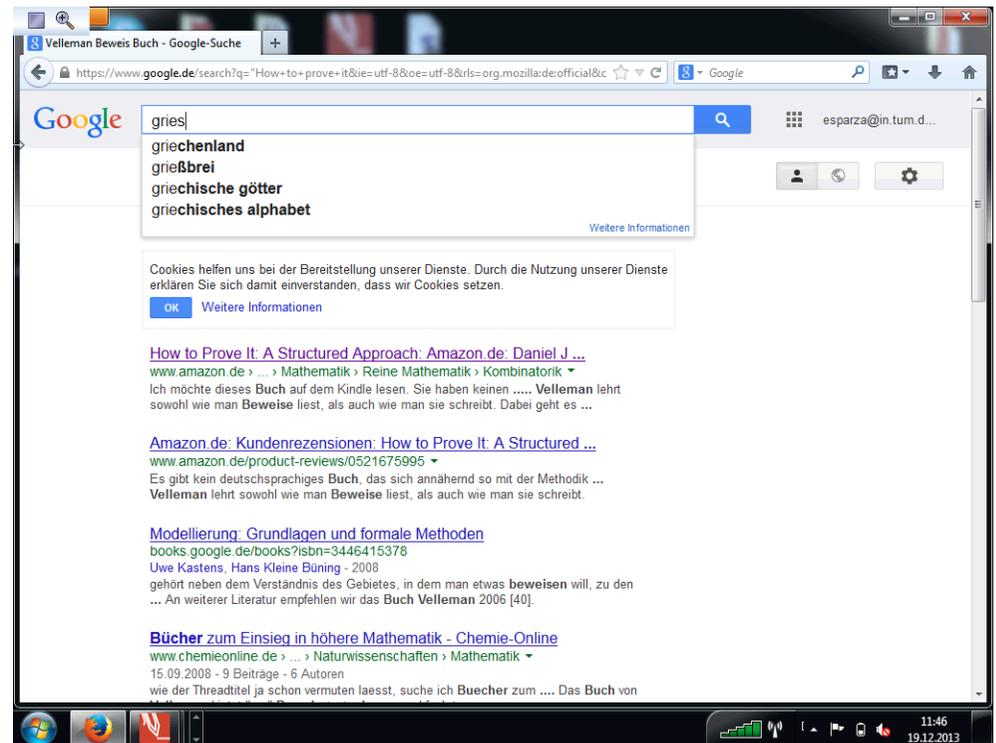
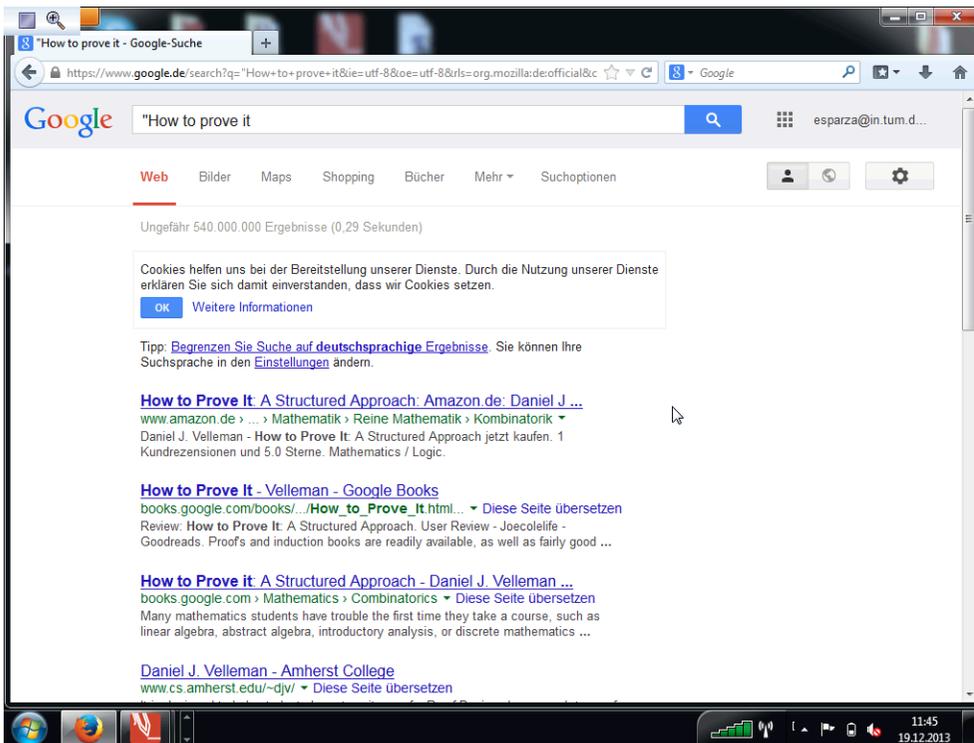
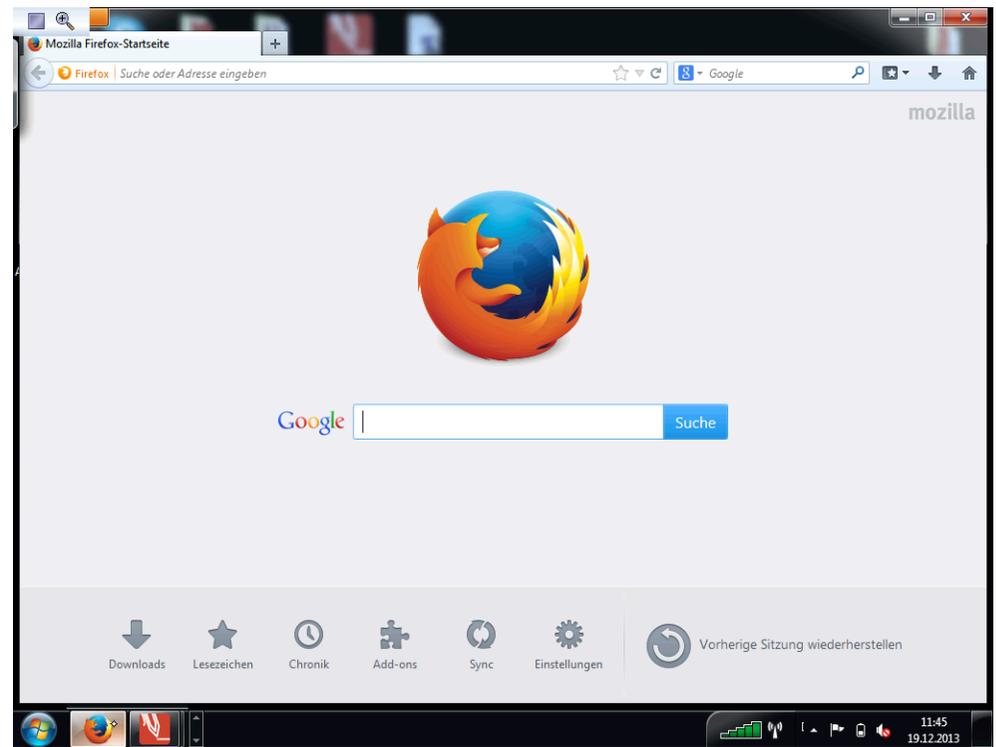
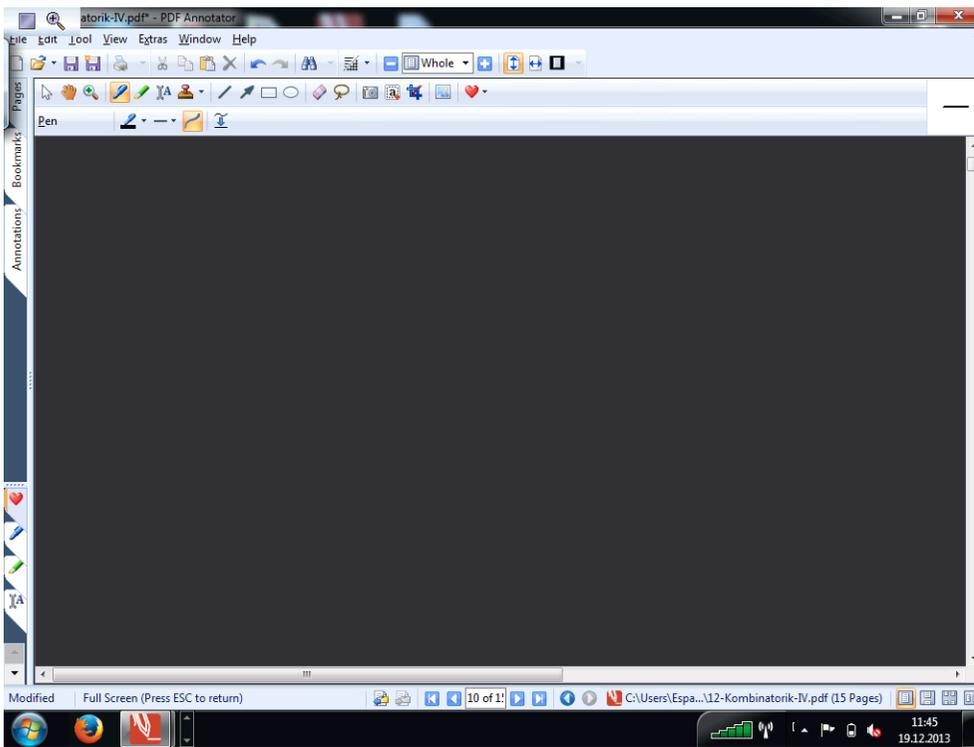
- Jede Belegung der Urnen wird **eindeutig** durch die **Anzahl der Bälle in den Urnen** bestimmt.  
Die Anzahl der Möglichkeiten ist damit die Anzahl der ungeordneten Partitionen der Zahl  $n$ .

9

## Kapitel III – Kombinatorik

- **Anwendungsbeispiel:** Zufällige Speicherung von Dateien in Servern.  
 $n$  Dateien werden zufällig in  $n$  Server gespeichert. Wir suchen eine Zahl  $k$ , so dass mit großer W'keit kein Server mehr als  $k$  Dateien bekommt.  
Modellierung:  $n$  unterscheidbare Bälle (Dateien) und  $n$  unterscheidbare Urnen (Server).  
Gesamtzahl aller Möglichkeiten:  $n^n$

10



www.amazon.com/Logical-Approach-Discrete-Monographs-Computer/dp/1441928359

amazon  
Your Amazon.com Today's Deals Gift Cards Sell Help

Shop by Department Search Books Go Hello, Sign in Your Account Try Prime Cart Wish List

Books Advanced Search New Releases Best Sellers The New York Times® Best Sellers Children's Books Textbooks Sell Your Books Best Books of the Month

Springer Up to 50% Off Radiology titles from Springer

Click to LOOK INSIDE!

**A Logical Approach to Discrete Math (Monographs in Computer Science) [Paperback]**  
David Gries (Author), Fred B. Schneider (Author)  
Be the first to review this item

List Price: \$84.95  
Price: **\$80.26 & FREE Shipping**. Details  
You Save: \$4.69 (6%)

Only 1 left in stock (more on the way).  
Ships from and sold by Amazon.com. Gift-wrap available.

Want it tomorrow, Dec. 20? Order within and choose **One-Day Shipping** at checkout. Details

Ordering for Christmas? To ensure delivery by December 24 choose **Standard Shipping** at checkout. Extended holiday returns until Jan. 31. Read more about shipping and returns.

Buy New **\$80.26**  
Quantity: 1  
Add to Cart  
Buy Used **\$53.99**  
Add to Wish List

More Buying Choices  
36 used & new from \$50.00  
Have one to sell? Sell on Amazon

Share

21 new from \$61.84 15 used from \$50.00

**FREE TWO-DAY SHIPPING FOR COLLEGE STUDENTS**  
amazonstudent

Warten auf www.amazon.com...

how to prove it - Google-Suche

https://www.google.de/search?q=how+to+prove+it&ie=utf-8&oe=utf-8&rlz=org.mozilla:de:official&cl...

Google how to prove it

Web Bilder Maps Shopping Bücher Mehr Suchoptionen

Ungefähr 540.000.000 Ergebnisse (0,27 Sekunden)

Cookies helfen uns bei der Bereitstellung unserer Dienste. Durch die Nutzung unserer Dienste erklären Sie sich damit einverstanden, dass wir Cookies setzen.  
OK Weitere Informationen

Tipp: [Begrenzen Sie Suche auf deutschsprachige Ergebnisse](#). Sie können Ihre Suchsprache in den [Einstellungen](#) ändern.

[How to Prove It: A Structured Approach - Amazon.de: Daniel J. Velleman](#)  
www.amazon.de > ... > Mathematik > Reine Mathematik > Kombinatorik > Daniel J. Velleman - How to Prove It: A Structured Approach jetzt kaufen. 1 Kundrezensionen und 5.0 Sterne. Mathematics / Logic.

[How to Prove It - Velleman - Google Books](#)  
books.google.com/books/.../How\_to\_Prove\_It.html... > Diese Seite übersetzen  
Review: How to Prove It: A Structured Approach. User Review - Joecelelife - Goodreads. Proofs and induction books are readily available, as well as fairly good ...

[How to Prove It: A Structured Approach - Daniel J. Velleman](#)  
books.google.com > Mathematics > Combinatorics > Diese Seite übersetzen  
Many mathematics students have trouble the first time they take a course, such as linear algebra, abstract algebra, introductory analysis, or discrete mathematics ...

[Daniel J. Velleman - Amherst College](#)  
www.cs.amherst.edu/~djl/ > Diese Seite übersetzen

mathematical proofs - Google-Suche

https://www.google.de/search?q=mathematical+proofs&ie=utf-8&oe=utf-8&rlz=org.mozilla:de:official&...

Google mathematical proofs

Web Bilder Maps Shopping Bücher Mehr Suchoptionen

Ungefähr 2.130.000 Ergebnisse (0,38 Sekunden)

Ergebnisse für [mathematical proofs](#)  
Stattdessen suchen nach: mathematical proofs

Cookies helfen uns bei der Bereitstellung unserer Dienste. Durch die Nutzung unserer Dienste erklären Sie sich damit einverstanden, dass wir Cookies setzen.  
OK Weitere Informationen

[Mathematical proof - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
en.wikipedia.org/wiki/Mathematical\_proof > Diese Seite übersetzen  
In **mathematics**, a **proof** is a deductive argument for a **mathematical statement**. In the argument, other previously established statements, such as theorems, can ...

[List of mathematical proofs - Wikipedia, the free encyclopedia](#)  
en.wikipedia.org/wiki/List\_of\_mathematical\_proofs > Diese Seite übersetzen  
A list of articles with **mathematical proofs**: Contents. 1 Theorems of which articles are primarily devoted to proving them; 2 Articles devoted to theorems of which a ...

[Bilder zu mathematical proofs](#) - Unangemessene Bilder melden

www.google.de/gelesen

Proofs by Contrapositive

zimmer.csufresno.edu/~larryc/proofs/proofs.contrapositive.html

## Proof by Contrapositive

Proof by contrapositive takes advantage of the logical equivalence between "P implies Q" and "Not Q implies Not P". For example, the assertion "If it is my car, then it is red" is equivalent to "If that car is not red, then it is not mine". So, to prove "If P, Then Q" by the method of contrapositive means to prove "If Not Q, Then Not P".

### Example: Parity

Here is a simple example that illustrates the method. The proof will use the following definitions.

**Definitions.**

1. An integer  $x$  is called **even** (respectively **odd**) if there is another integer  $k$  for which  $x = 2k$  (respectively  $2k+1$ ).
2. Two integers are said to have the same **parity** if they are both odd or both even.

For the purpose of this example we will assume as proved that each integer is either even or odd.

**Theorem.** If  $x$  and  $y$  are two integers for which  $x+y$  is even, then  $x$  and  $y$  have the same parity.

**Proof.** The contrapositive version of this theorem is "If  $x$  and  $y$  are two integers with opposite parity, then their sum must be odd." So we assume  $x$  and  $y$  have opposite parity. Since one of these integers is even and the other odd, there is no loss of generality to suppose  $x$  is even and  $y$  is odd. Thus, there are integers  $k$  and  $m$  for which  $x = 2k$  and  $y = 2m+1$ . Now then, we compute the sum  $x+y = 2k + 2m + 1 = 2(k+m) + 1$ , which is an odd integer by definition.

### How Is This Different From Proof by Contradiction?

The difference between the Contrapositive method and the Contradiction method is subtle. Let's examine how the two methods work when trying to prove "If P, Then Q".

