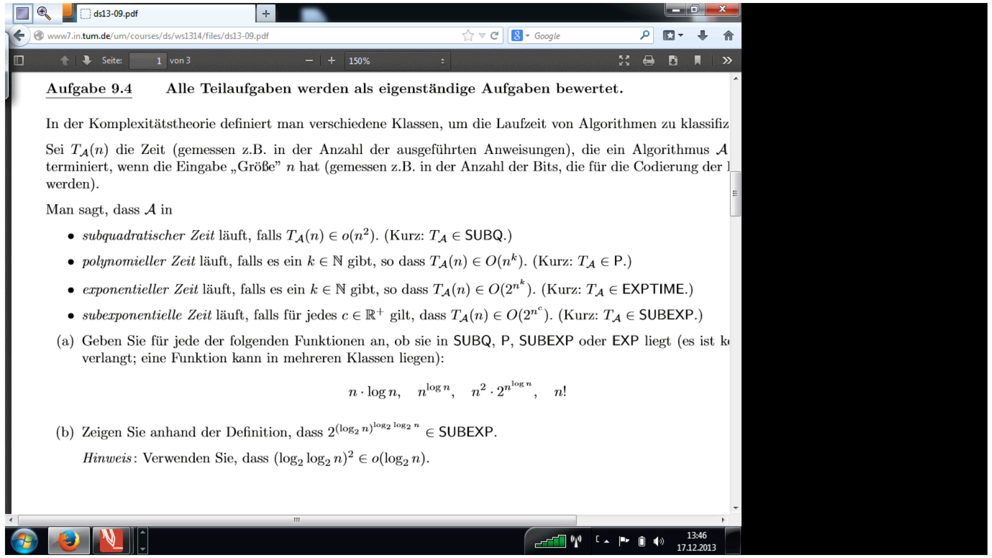
Script generated by TTT

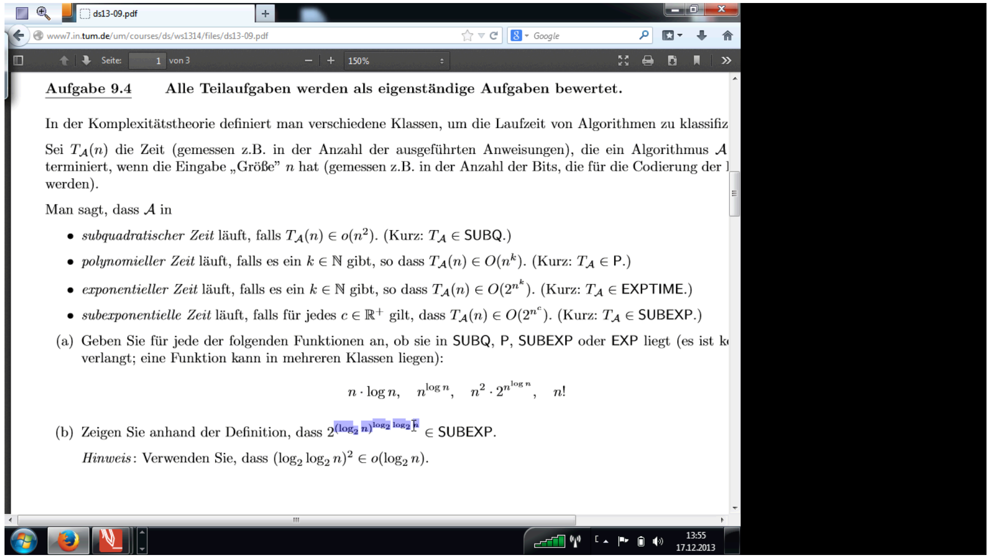
Title: Esparza: Diskrete Strukturen (17.12.2013)

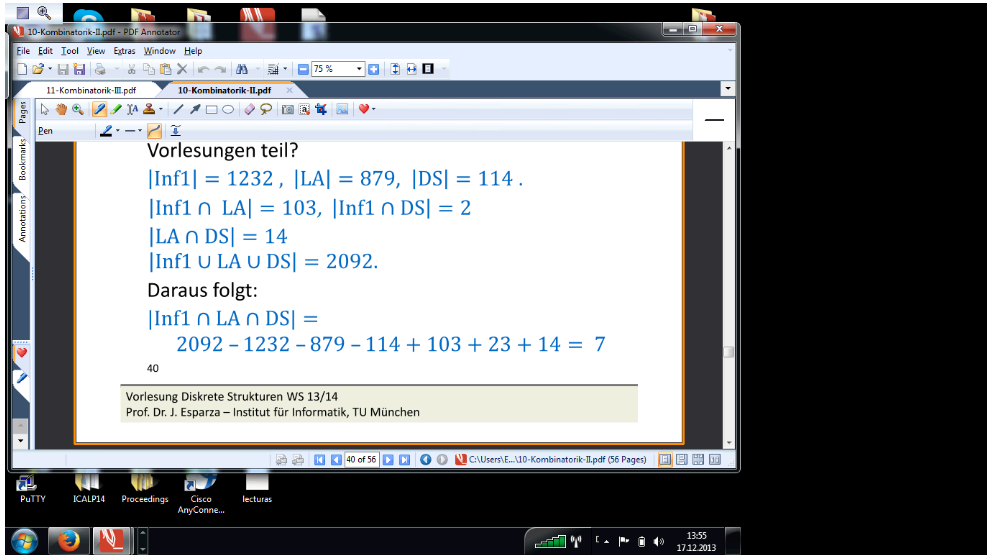
Date: Tue Dec 17 13:46:55 CET 2013

Duration: 89:38 min

Pages: 53







- Das Prinzip der Inklusion/Exklusion

  Bei der Summenregel müssen die zu vereinigenden Teilmengen disjunkt sein. Das Prinzip der Inklusion/Exklusion erlaubt uns, die Kardinalität der Vereinigung zu beschreiben, wenn die zu vereinigenden Mengen nicht disjunkt sind.

Prinzip der Inklusion/Exklusion für 2 Mengen

Seien A und B zwei beliebige endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Prinzip der Inklusion/Exklusion

  Beispiel:

  Wieviele durch 7 oder 11 teilbare natürliche Zahlen kleiner gleich 1000 gibt es?

Kapitel II – Kombinatorik

- Prinzip der Inklusion/Exklusion

  Beispiel: An den Vorlesungen Inf1, LA und DS nehmen jeweils 1232, 879 und 114 Studierende teil.

  103 nehmen an InfI und LA teil,
  23 an InfI und DS und
  14 an LA und DS.

  2092 Studierende nehmen an mindestens einer der Vorlesungen teil.

Kapitel II – Kombinatorik

- Prinzip der Inklusion/Exklusion
  Wieviele Studierende nehmen an allen drei Vorlesungen teil?

  $|\mathrm{Inf1}| = 1232\,,\ |\mathrm{LA}| = 879,\ |\mathrm{DS}| = 114\,.$

  $|\mathrm{Inf1} \cap \mathrm{LA}| = 103,\ |\mathrm{Inf1} \cap \mathrm{DS}| = 2$

  $|\mathrm{LA} \cap \mathrm{DS}| = 14$

  $|\mathrm{Inf1} \cup \mathrm{LA} \cup \mathrm{DS}| = 2092.$

  Daraus folgt:

  $|\mathrm{Inf1} \cap \mathrm{LA} \cap \mathrm{DS}| =$

  $2092 - 1232 - 879 - 114 + 103 + 23 + 14 = 7$

Kapitel II – Kombinatorik

Prinzip der Inklusion/Exklusion für n Mengen

Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup \cdots A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Kapitel II – Kombinatorik

Das Schubfachprinzip

Ist $f: X \to Y$ eine Abbildung und gilt $|X| > |Y|$, so gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq 2$.

"Wenn man n Elemente auf m Fächer verteilt und $n > m$ ist, dann gibt es mindestens ein Fach, das 2 Elemente enthält."

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

  Beispiel:
  In jeder Menge von 13 Personen befinden sich zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.

  Beispiel:
  Wenn 42 Studenten an einer Klausur teilnehmen, bei der es bis zu 40 Punkte gibt, so gibt es mindestens zwei Studenten, die die gleiche Punktzahl haben.

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

  Satz: In jeder Menge P von Personen, $|P| \geq 2$, gibt es mindestens 2 Personen, die die gleiche Anzahl von Personen aus P kennen.

  (Annahme: die Relation "kennen" ist symmetrisch.)

  Beweis: Sei $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ mit $n \geq 2$.

  Sei $f: P \to \{0, \ldots, n-1\}$ die Funktion, die angibt, wieviele Personen jede Person kennt.

  Wir zeigen $|f(P)| < |P|$.

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

  Wir betrachten zwei Fälle:
  - $\exists p_i \in P: f(p_i) = 0$.

    Dann gilt $\forall p_i \in P: f(p_i) \in \{0, \ldots, n-2\}$.
  - $\neg\exists p_i \in P: f(p_i) = 0$.

    Dann gilt $\forall p_i \in P: f(p_i) \in \{1, \ldots, n-1\}$.

  In beiden Fällen gilt $|f(P)| \leq n - 1 < n = |P|$.

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

  Satz: In jeder $(n+1)$-elementigen Teilmenge von $M = \{1,2,\ldots,2n\}$ gibt es mindestens zwei Zahlen, die zueinander teilerfremd sind.

  Beweis: Unter je $n+1$ Zahlen der Menge M gibt es stets zwei aufeinanderfolgende; diese Zahlen sind sicher teilerfremd. □

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

  Satz: In jeder Menge M bestehend aus sechs natürlichen Zahlen ($M = \{a_1,\ldots,a_6\}$) gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

  Beweis: Wir bilden Teilmengen $K_i \subseteq M$ mit

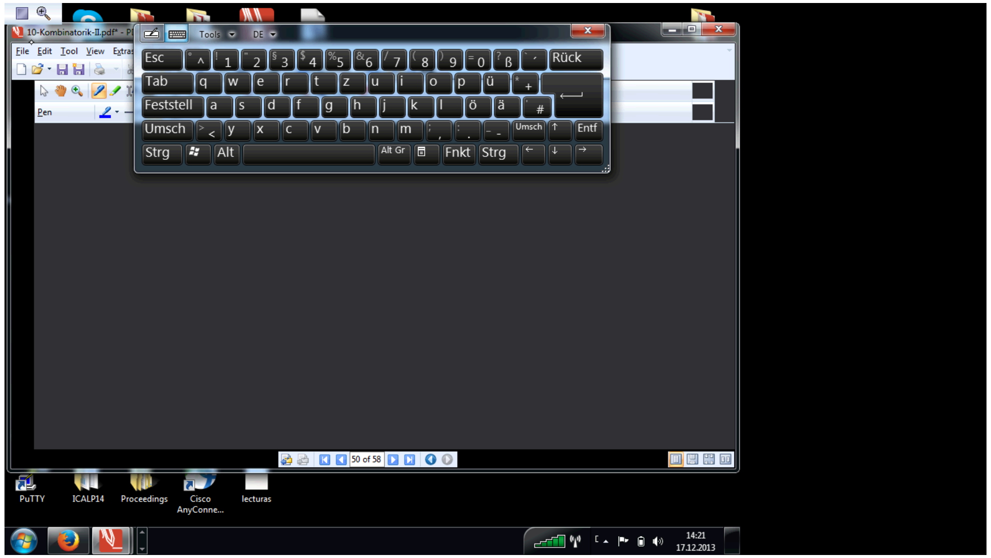
  $$K_i = \{a_i \in M \mid a_i \equiv 1 \; mod \; 5\}\,.$$

  Nach dem Schubfachprinzip gibt es eine Teilmenge, die zwei Zahlen enthält, die denselben Rest ergeben. Deren Differenz ist durch 5 teilbar. □

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

  Satz: Sei $A \subseteq \{1,2,\ldots,2n\}$ mit $|A| = n+1$. Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, von denen die eine die andere teilt.



10-Kombinatorik-II.pdf*

File Edit Tool View Extras Window Help

- Das Schubfachprinzip

Satz: Sei $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ mit $|A| = n + 1$. Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, von denen die eine die andere teilt.

50 of 58 C:\Users\E...\10-Kombinatorik-II.pdf (58 Pages)

14:22 17.12.2013

Kapitel II – Kombinatorik

- Das Schubfachprinzip

Satz: Sei $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ mit $|A| = n + 1$. Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, von denen die eine die andere teilt.

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung so gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq \lceil |X|/|Y| \rceil$.

"Wenn man n Elemente auf m Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das mindestens $\lceil n/m \rceil$ Elemente enthält."

Kapitel II – Kombinatorik

- Widerspruchsbeweis des verallgemeinerten Schubfachprinzip

Angenommen keines der Fächer enthält mehr als $\lceil |X|/|Y| \rceil - 1$ Elemente.

Dann ist die Anzahl aller Elemente höchstens

$$|Y|\left(\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1\right) < |Y|\left(\left(\frac{|X|}{|Y|} + 1\right) - 1\right) = |X|$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung so gibt es ein $y \in Y$ mit $|f^{-1}(y)| \geq \lceil |X|/|Y| \rceil$.

5 2 19 6

"Wenn man n Elemente auf m Fächer verteilt, dann gibt es mindestens ein Fach, das mindestens $\lceil n/m \rceil$ Elemente enthält."

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

  Beispiel:

  Wenn es $N = 380$ Studierende in dieser Vorlesung gibt und es gibt 52 Wochen in einem Jahr, dann muss es mindestens eine Woche geben, in der mindestens $\lceil 380/52 \rceil = \lceil 7.31 \rceil = 8$ Studierende der Vorlesung Geburtstag haben.

- Beweis (Fortsetzung):

  Fall 1. A kennt drei Personen B, C, D.

  – Wenn sich zwei Personen aus B, C, D kennen, dann erhalten wir mit A die drei Personen, die sich kennen.

  – Wenn sich keine zwei Personen aus B, C, D kennen, dann sind B, C, D die drei Personen, die sich nicht kennen.

  Fall 2. Symmetrisch □

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

  Beweis:

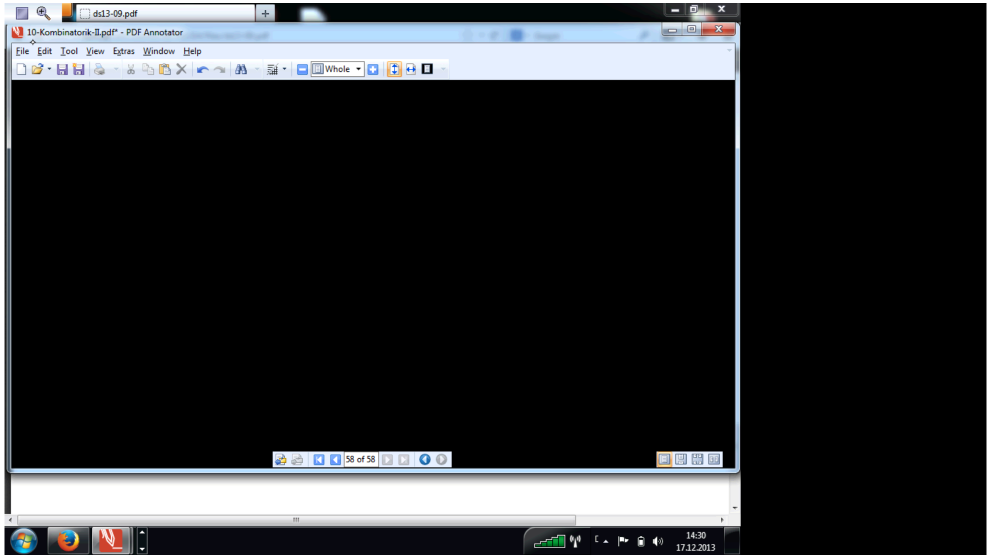
  Sei A eine der 6 Personen. Unter den verbleibenden 5 Personen gibt es entweder 3, die A kennt, oder drei, die A nicht kennt. (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

  Wir betrachten diese zwei Fälle.

A B F E D C

Kapitel II – Kombinatorik

- Das verallgemeinerte Schubfachprinzip
  - Die sog. Ramsey-Zahlen $R(m,n)$, mit $m,n \in \mathbb{N}$ und $m,n \geq 2$, geben die minimale Anzahl von Personen aus einer Gruppe an, so dass sich entweder m Personen kennen oder n Personen nicht kennen.
  - Wir haben also gezeigt, dass $R(3,3) \leq 6$.
  - Es ist leicht zu sehen, dass $R(3,3) = 6$.



Kapitel III – Kombinatorik

- Fundamentale Zählkoeffizienten
  Die Binomialkoeffizienten
  $$\binom{n}{k}$$
  zählen die Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge.
- Der Name Binomialkoeffizient resultiert daher, dass diese Zahlen in der Exponentiation von binomialen Ausdrücken $(a+b)^n$ vorkommen.

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Binomische Formel

  Beispiel: Was ist der Koeffizient von $x^{12}y^{13}$ in der Expansion von $(2x-3y)^{25}$

  Antwort: Da
  $$(2x+(-3y))^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (2x)^{25-k}(-3y)^k$$
  erhalten wir für den Koeffizienten
  $$(25!/(13!\,12!)2^{12}(-3)^{13}).$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Binomische Formel:

  Korollar. Für alle $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$2^n$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Das Pascalsche Dreieck:

  Geometrische Anordnung der Binomialkoeffizienten in Form eines Dreiecks:

Werden zwei benachbarte Koeffizienten addiert, dann ergibt dies den Koeffizienten in der nächsten Zeile zwischen diesen beiden.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Pascalsche Identität:

  Satz: Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Pascalsche Identität:

  Satz: Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Kombinatorischer Beweis der Identität.

Eine n-elementige Menge T hat $\binom{n}{k}$ k-Teilmengen.

Sei $a \in T$. Jede k-Teilmenge enthält entweder

(1) a und $k-1$ Elemente aus $T \setminus \{a\}$, oder

(2) k Elemente aus $T \setminus \{a\}$.

Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ bzw. $\binom{n-1}{k}$ Teilmengen von Typ (1) bzw. von Typ (2). □

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Vandermode Identität

In unserem Vorlesungsaal befinden sich $n+m$ Studierende, davon sind n in München geboren und m woanders.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Studierende auszuwählen?

Lösung 1: $\binom{n+m}{k}$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Vandermode Identität

In unserem Vorlesungsaal befinden sich $n+m$ Studierende, davon sind n in München geboren und m woanders.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Studierende auszuwählen?

Lösung 1: $\binom{n+m}{k}$

Kapitel III – Kombinatorik

Lösung 2: Nehme j Elemente aus der ersten Menge und dann $k-j$ Elemente aus der zweiten Menge, wobei $0 \le j \le k$ gilt. Aus der Produktregel folgt, dass es für jedes j

$$\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

Möglichkeiten gibt.

Kapitel III – Kombinatorik

Die erste Lösung muss gleich der zweiten Lösung ein, wenn man die Möglichkeiten für alle Werte von j addiert. Es ergibt sich

- Satz (Vandermonde Identität):

$\binom{n}{k} = (\;) + (\;)$

$n+m = 100$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$$

Kapitel III – Kombinatorik

Die erste Lösung muss gleich der zweiten Lösung ein, wenn man die Möglichkeiten für alle Werte von j addiert. Es ergibt sich

- Satz (Vandermonde Identität):

$\binom{n}{k} = (\;) + (\;)$

$n+m = 100$

$$\underline{\binom{n+m}{k}} = \underline{\sum_{j=0}^{k}} \underline{\binom{n}{j}} \underline{\binom{m}{k-j}}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Aufgabe:

  Betrachte den Punkt der xy-Ebene mit Koordinaten $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Wieviele Pfade gibt es vom Punkt $(0,0)$ zu (m, n), die aus Schritten der Länge 1 nach rechts oder nach oben bestehen ?

Kapitel III – Kombinatorik

Die erste Lösung muss gleich der zweiten Lösung ein, wenn man die Möglichkeiten für alle Werte von j addiert. Es ergibt sich

- Satz (Vandermonde Identität):

$\binom{n}{k} = (\ ) + (\ )$

$n+m = 100$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$$

Kapitel III – Kombinatorik

Die Anzahl von Zeichenfolgen der Länge $m + n$, die genau n Einsen beinhalten, ist gegeben durch die Anzahl Positionen, an denen die n Einsen stehen (oder die m Nullen)stehen.

Es folgt, dass die Anzahl von Pfaden gegeben ist durch

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art
  - Definition: Eine k-Partition einer n-elementigen Menge $A = \{s_1, \dots, s_n\}$ ist eine Zerlegung von A in k disjunkte, nichtleere Teilmengen (oder Blöcke) $A_1, \dots, A_k$, so dass gilt:

$$\biguplus_{i=1}^{k} A_i = A$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

Beispiel für $n = 5$ und $k = 4$:

$\{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\}\}$ $\{\{1,5\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

$\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\}\}$ $\{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4\}\}$

$\{\{1\},\{2\},\{2,4\},\{5\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3,5\},\{4\}\}$

$\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\}\}$

$\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$

$\{\{1,4\},\{2\},\{3\},\{5\}\}$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

  Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge

  =

  Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte in k gleiche Fächer zu verteilen (jedes Fach bekommt mindestens ein Objekt!).

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

  Die Anzahl von k-Partitionen wird durch die sogenannten Stirlingzahlen zweiter Art angegeben und mit $S_{n,k}$ oder $\left\{ {n \atop k} \right\}$ bezeichnet.

  Insbesondere gilt:
  - $S_{n,k} = 0$ für $k > n$,
  - $S_{n,0} = 0$ für $n > 0$, und
  - $S_{0,0} = 1$.
- Frage: Wie lassen sich diese Zahlen berechnen?

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

  Sei $n \geq k > 0$. Wir teilen die k-Partitionen in zwei disjunkte Klassen auf
  - Klasse 1: alle Partitionen, in denen sich das Element s_n alleine in einem Block befindet.
  - Klasse 2: alle andere Partitionen.

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

  Beispiel für $n = 5$ und $k = 4$:

  $\{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\}\}$ $\{\{1,5\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

  $\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\}\}$ $\{\{1\},\{2,5\},\{3\},\{4\}\}$

  $\{\{1\},\{3\},\{2,4\},\{5\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3,5\},\{4\}\}$

  $\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\}\}$

  $\{\{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\}\}$

  $\{\{1,4\},\{2\},\{3\},\{5\}\}$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art

  Satz: Die Stirlingzahlen $S_{n,k}$ der zweiten Art, erfüllen folgende Rekursionsgleichung:

$$S_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0, n = 0 \\ 0 & \text{falls } k = 0, n > 0 \\ 0 & \text{falls } k > 0, k > n \\ S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} & \text{falls } k > 0, k \leq n \end{cases}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Stirlingzahlen der zweiten Art