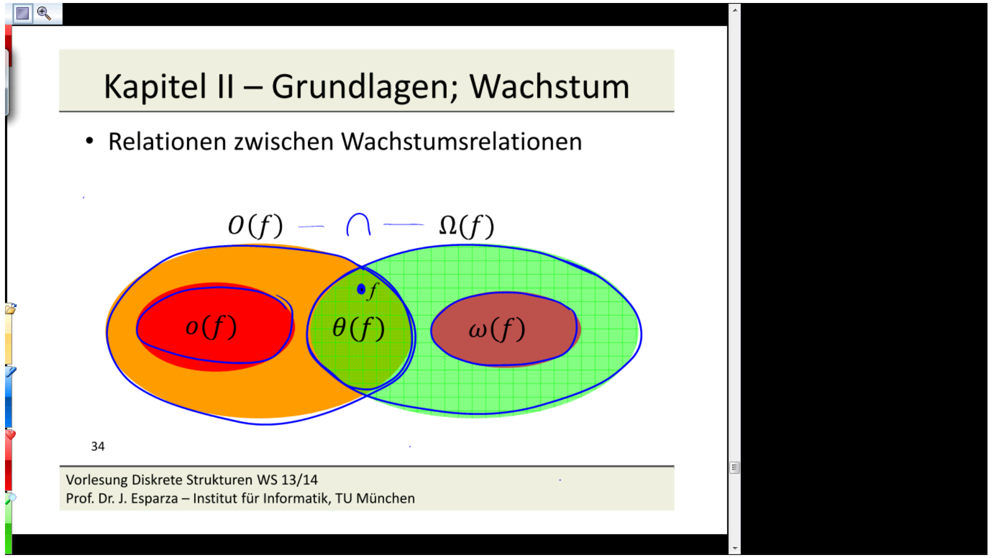
Script generated by TTT

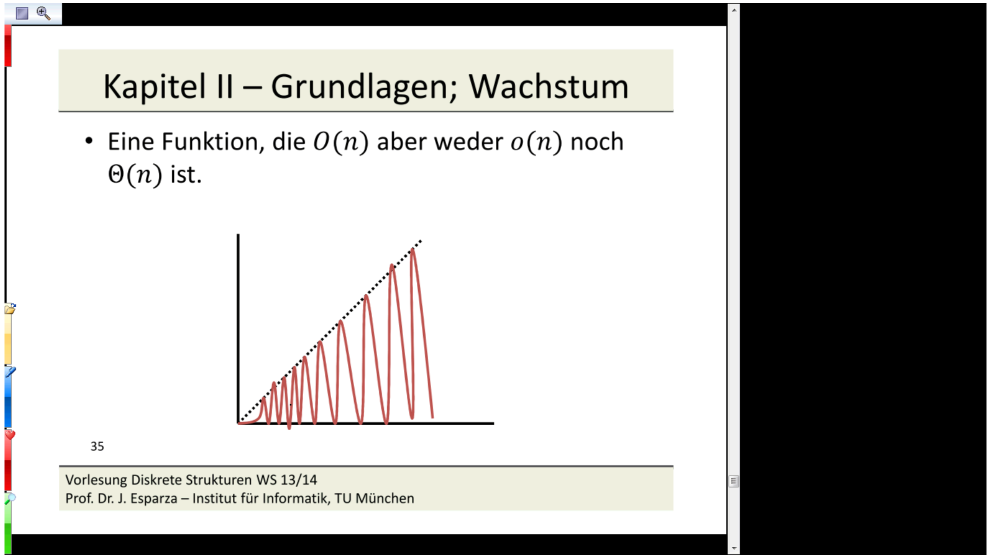
Title: Esparza: Diskrete Strukturen (05.12.2013)

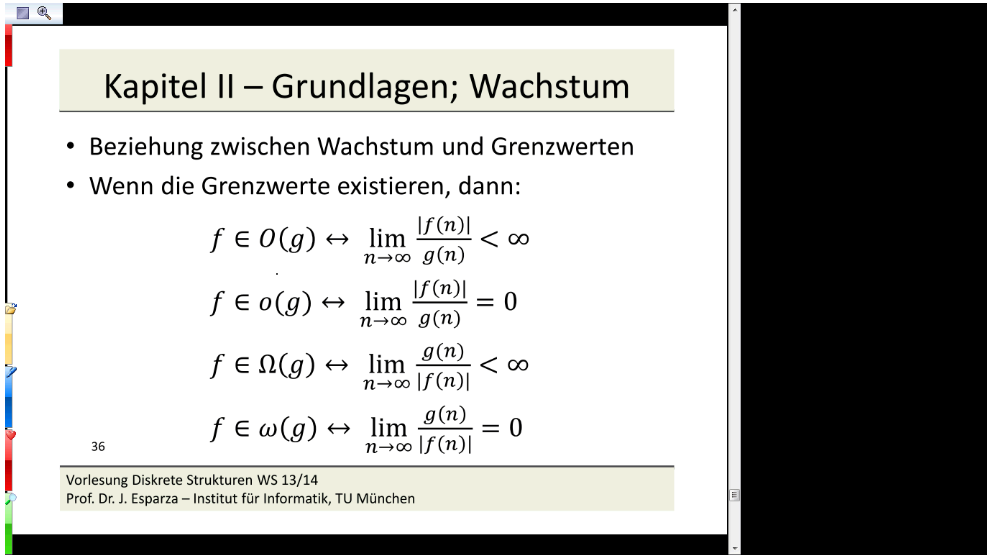
Date: Thu Dec 05 10:23:26 CET 2013

Duration: 82:25 min

Pages: 34







Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Strikte Ordnung von Funktionen:
  - Häufig schreibt man $f \prec g$ für $f \in o(g)$
  - Für alle $k > 1$ gilt:

$$1 \prec \log_2 \log_2 n \prec \log_2 n \prec \log_2^k n \prec$$
$$\prec n^{\frac{1}{k}} \prec n \prec n \log_2 n \prec$$
$$\prec n^k \prec k^n \prec n! \prec n^n \cdots$$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Strikte Ordnung von Funktionen:
  - Häufig schreibt man $f \prec g$ für $f \in o(g)$
  - Für alle $k > 1$ gilt:

$$1 \prec \log_2 \log_2 n \prec \log_2 n \prec \log_2^k n \prec$$
$$\prec n^{\frac{1}{k}} \prec n \prec n \log_2 n \prec$$
$$\prec n^k \prec k^n \prec n! \prec n^n \cdots$$

$\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\Omega(n \log n)$

$\Theta(n \log n)$

$\log_2^{10^6} n < n^{1/10^6}$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Beispiele Wachstumsverhalten

TABLE 2 The Computer Time Used by Algorithms.

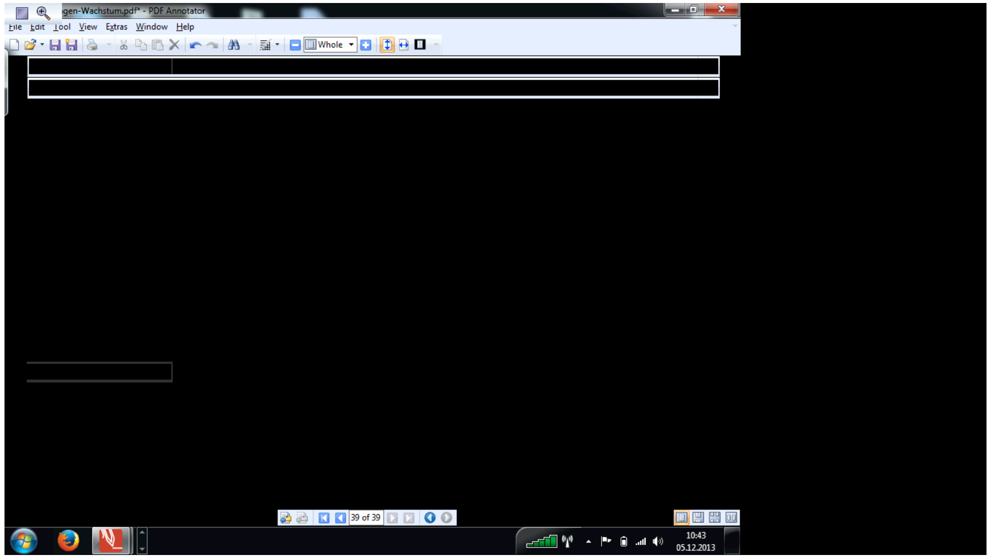
Problem Size	*Bit Operations Used*					
n	$\log n$	n	$n \log n$	n^2	2^n	$n!$
10	3×10^{-9} s	10^{-8} s	3×10^{-8} s	10^{-7} s	10^{-6} s	3×10^{-3} s
10^2	7×10^{-9} s	10^{-7} s	7×10^{-7} s	10^{-5} s	4×10^{13} yr	*
10^3	1.0×10^{-8} s	10^{-6} s	1×10^{-5} s	10^{-3} s	*	*
10^4	1.3×10^{-8} s	10^{-5} s	1×10^{-4} s	10^{-1} s	*	*
10^5	1.7×10^{-8} s	10^{-4} s	2×10^{-3} s	10 s	*	*
10^6	2×10^{-8} s	10^{-3} s	2×10^{-2} s	17 min	*	*

Annahme: eine Operation dauert 10^{-9} Sekunden, $\log n = \log_2 n$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Hierarchie von Größenordnungen

Größenordnung	Name
$O(1)$	konstante Funktionen
$O(\log n)$	logarithmische Funktionen
$O(\log^k n)$	poly-logarithmische Funktionen
$O(n)$	lineare Funktionen
$O(n \log n)$	$n \log n$-wachsende Funktionen
$O(n^2)$	quadratische Funktionen
$O(n^3)$	kubische Funktionen
$\bigcup_{k \geq 1} O(n^k)$	polynomielle Funktionen



Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

  Das ist die W'keit, dass bei $(n-j)$ Würfe einer Münze mindestens $(m-j)$ -mal "Zahl" vorkommt.

  Anzahl der Möglichen Wurfsequenzen: 2^{n-j}

  Anzahl der Wurfsequenzen mit mindestens $(m-j)$-mal "Zahl": $\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-j}{m-j+k}$

Kapitel III - Kombinatorik

- Kombinatorische Strukturen und Algorithmen
  - Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - Kombinatorische Beweisprinzipien
  - Fundamentale Zählkoeffizienten
  - Bälle und Urnen

Kapitel III – Kombinatorik

- Kombinatorik: In der Kombinatorik studieren wir Probleme folgender Art.:
  - Gegeben ist eine Menge A.

    Es wird eine Menge B definiert, deren Elemente die Objekte sind, die aus Elementen von A konstruiert worden sind, und eine gewisse Eigenschaft erfüllen.
  - Frage: wie viele Elemente enthält B?
- Modellierung: Schritte, die von der Formulierung des Problems auf Deutsch zu der präzisen Definition der Mengen A und B führen.

Kapitel III – Kombinatorik

- Beispiel: Wieviele Lottziehung gibt es, in denen mindestens zwei Zahlen konsekutiv sind?
  - $A = \{1, \dots, 49\}$
  - $B = \{ C \subseteq A \mid |C| = 6 \wedge \exists a, b \in C \colon b = a + 1 \}$
- Beispiel: In einem Wettkampf zwischen 100 Leuten, wie viele unterschiedliche Möglichkeiten für die ersten 10 gibt es?
  - $A = \{1, 2, \dots, 100\}$
  - $B = \{ (b_1, \dots, b_{10}) \in A^{10} \mid b_i \neq b_j \; \forall i, j \in [10] \}$

Kapitel III – Kombinatorik

- Beispiel: Ein Systemadministrator verwendet folgende Regel für die Vergabe von UserIds und Passwörter:
  - Ein UserId enthält nur Ziffern und Buchstaben, hat Länge zwischen 6 und 32, und keine Ziffer darf vor einem Buschtabe kommen.
  - Ein Passwort enthält Ziffern, Buchstaben und Sonderzeichen (jeweils mindestens 1), und hat Länge zwischen 8 und 16. Die ersten drei Zeichen dürfen nicht mit den ersten drei Zeichen des UserIds identisch sein.
  - Frage: wieviele Paare (UserId, Passwort) gibt es ?

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - In vielen Fällen kann man sich vorstellen, dass die Elemente von B konstruiert werden, in dem Elemente aus A hintereinander „zieht“ und zusammensetzt.
  - Dabei kann jedes Element nach der Ziehung:
    - Zurückgelegt werden (damit kann das Element beliebig oft gezogen werden).
    - Nicht zurückgelegt werden (damit kann das Element höchstens einmal gezogen werden).
  - Die Reihenfolge der Ziehungen kann
    - Berücksichtigt werden (z.B. wenn eine Zahl bestimmt wird, in dem man Ziffern zieht).
    - Ignoriert werden (z.B. Lottoziehung).

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen von Elementen aus einer Menge
  - k Elemente, geordnet, mit Zurücklegen
    - $B = A^k$
  - k Elemente, geordnet, ohne Zurücklegen
    - B = Menge der Tupeln von A^k, deren Komponenten paarweise verschieden sind.
  - k Elemente, ungeordnet, mit Zurücklegen
    - B = Menge aller k-elementigen Multimengen über A (Multimengen können ein Element mehrmals enthalten.)
  - k Elemente, ungeordnet, ohne Zurücklegen
    - B = Menge aller k-elementigen Teilmengen von A

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen von Elementen aus einer Menge

  Beispiel: Die unterschiedlichen Möglichkeiten für das Ziehen von 2 Objekten aus einer dreielementigen Menge.

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	$(1,1),(1,2),(1,3)$ $(2,1),(2,2),(2,3)$ $(3,1),(3,2),(3,3)$	$\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\}$ $\{2,2\},\{2,3\},\{3,3\}$
ohne Zurücklegen	$(1,2),(1,3),(2,1)$ $(2,3),(3,1),(3,2)$	$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen mit Zurücklegen, geordnet

  Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente jeweils zurückgelegt werden und es auf die Reihenfolge der Elemente ankommen soll.
- Da es in jedem Zug n Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\text{mal}} = n^k$$

  Möglichkeiten.

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen ohne Zurücklegen, geordnet
  - Jede Mögliche Ziehung ist eine Variation.
    - Eine Variation einer Menge A ist eine Sequenz von Elementen von A, in der jedes Element höchstens einmal vorkommt.
  - Eine Variation der Länge $|A|$ nennt man Permutation.
    - Eine Permutation einer Menge A ist eine Sequenz von Elementen von A, in der jedes Element genau einmal vorkommt.

Kapitel III – Kombinatorik

- Der Ausdruck

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

  wird fallende Faktorielle von n der Länge k genannt und wird mit

$$n^{\underline{k}}$$

  bezeichnet. Es gilt
- Definition: $n^{\underline{0}} := 1$ und $0! := 1$
- Die fallende Faktorielle zählt die Anzahl von k-Variationen der n Elemente einer Menge.

Kapitel III – Kombinatorik

- Beispiel:

  Angenommen, ein Vertreter muss 8 Städte besuchen, wobei er mit einer bestimmten Stadt beginnen muss, die Reihenfolge der anderen Städte jedoch beliebig ist.

  Frage:

  Auf wieviele unterschiedliche Möglichkeiten kann der Vertreter seine Reise durchführen?

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen ohne Zurücklegen, ungeordnet

  Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen, wobei die gezogenen Elemente nicht zurückgelegt werden und es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommen soll.
- Die Ziehung wird eindeutig durch die Untermenge der gezogenen Elemente bestimmt.
- Da wir k Elemente ziehen, sprechen wir in diesem Fall von k-Untermengen.

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen ohne Zurücklegen, ungeordnet

  Wieviele k-Untermengen einer n-elementigen Menge gibt es?

  Beachte, dass die k-Variationen einer Menge aus den k-Untermengen erhalten werden, indem deren Elemente geordnet werden!
  - Beispiel:

    Aus $\{1,3,5\}$ erhalten wir sechs 3-Variationen:
    $(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1)$

Kapitel III – Kombinatorik

- Ziehen o

  Wieviele … entigen Menge g

  Beachte, … Menge aus den … den, indem d … en!
  - Beispie

    Aus $\{1$ … en:
    $(1,3,5)$ … $5,3,1) \leftarrow 3!$

New
Size
Current page size
Style
5mm
7mm
Orientation
Pages
1
OK
Cancel

Kapitel III – Kombinatorik

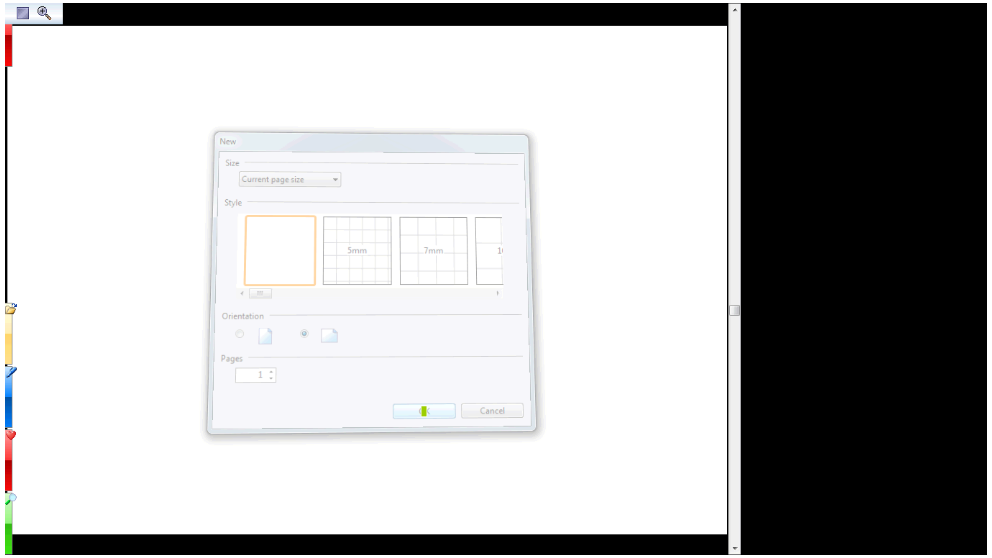
- Satz: Die Anzahl von k-Untermengen einer n-elementigen Menge ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Die Ausdrücke

$$\binom{n}{k}$$

heißen Binomialkoeffizienten.



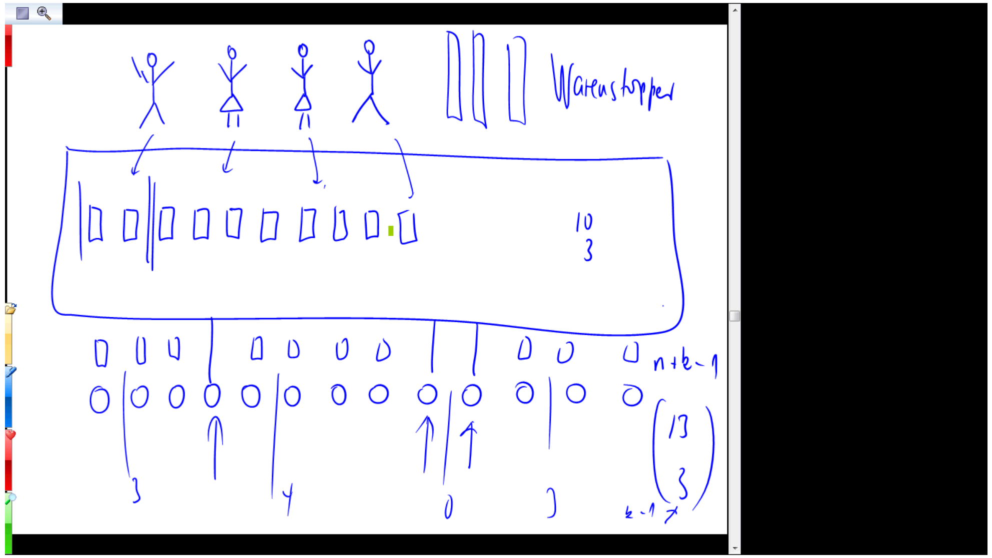
Kapitel III – Kombinatorik

- Beweis:

  Jede k-Multimenge aus einer Menge mit n Elementen kann als Liste bestehend aus $n-1$ Strichen "|" und k Sternen "⋆" repräsentiert werden.

  – Beispiel: ⋆⋆⋆|⋆||⋆⋆⋆⋆||

  – Die Striche separieren n Listenbereiche, wobei der i-te Bereich genau soviele Sterne beinhaltet wie das i-te Element in der Liste vorkommt.



- Ziehen mit Zurücklegen, ungeordnet

  Satz: Es gibt

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

k-Multimengen (Multimengen mit k Elementen) aus einer Menge mit n Elementen.

- Beweis:

  Jede k-Multimenge aus einer Menge mit n Elementen kann als Liste bestehend aus $n-1$ Strichen "|" und k Sternen "⋆" repräsentiert werden.

  – Beispiel: ⋆⋆⋆|⋆||⋆⋆⋆⋆||

  – Die Striche separieren n Listenbereiche, wobei der i-te Bereich genau soviele Sterne beinhaltet wie das i-te Element in der Liste vorkommt.

- Beispiel Lotto:

  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 6 aus 49 zu gewinnen?

- Die Lottosensation am 29.6.1995

  Stuttgart(dpa/lsw). Die Staatliche Toto-Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lottosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschichte das deutschen Zahlenlottos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21. Juni dieses Jahres [3016te Ausspielung] kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15-25-27-30-42-48 heraus. Genau die selben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstaglotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1986. Welch ein Lottozufall!

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

Wirklich eine Sensation?

Es gibt $M = 13.983.816$ mögliche (Sechser-)Ziehungen.

Wie viele Sequenzen von 3016 Ziehungen gibt es, und wie viele davon enthalten irgendeine Ziehung mindestens zweimal?

Sei Z die Menge aller Ziehungen, $|Z| = M$.

Wir ziehen nun 3016 Elemente aus Z, mit Zurücklegen, geordnet. Die Anzahl S der möglichen Sequenzen ist:

$$S = M^{3016}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

Wirklich eine Sensation?

Wie viele von diesen Sequenzen enthalten eine Ziehung mindestens zweimal?

Trick: wir berechnen die Anzahl der Sequenzen HE, in denen jede Ziehung höchstens einmal vorkommt, und substrahieren sie von S.

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M-(j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$