Script **generated by TTT**

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (03.12.2013)

Date: Tue Dec 03 14:15:46 CET 2013

Duration: 78:20 min

Pages: 22

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Def. (Groß-O-Notation): Let $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$O(\log n)$

$f(n) \in O(g(n))$ genau dann, wenn
$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot g(n)$

„f wächst (bis auf einen konstanten Faktor) höchstens so schnell wie g“

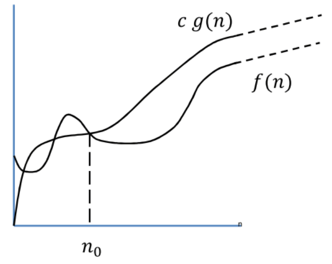
Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Warum $|f(n)| \leq c \cdot g(n)$ statt $|f(n)| \leq g(n)$?
- Nehmen wir an,
  - $f(n) = an + b$
  - $g(n) = cn + d$

  für Konstanten $a, \ldots, d$.
- Wir wollen f und g als Funktionen betrachten, die genau so schnell wachsen.
- Mit der Definition auf der vorigen Folie gilt $f \in O(g)$ und $g \in O(f)$.

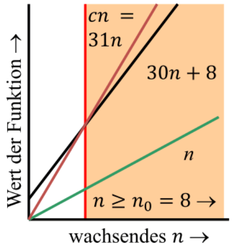
Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Veranschaulichung der Groß-O-Notation:



Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Beachte, dass $30n+8$ nicht überall kleiner als $31n$ ist.
- Aber es ist kleiner als $31n$ für $n \geq 8$.



Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Beispiel

Zeige, dass $f(n) = n^2 + 1 \in O(n^2)$.

Wir müssen zeigen:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : n^2 + 1 \leq cn^2.$$

Nehme:

$$c = 2\,,\ \ n_0 = 1.$$

Daraus folgt für alle $n \geq n_0$:

$$cn^2 = 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 1$$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Eine Funktion ist $O(g)$ wenn Konstanten c und n_0 existieren, die die Bedingung erfüllen.
- Aber, die speziellen Werte von c und n_0, die die Bedingung erfüllen, sind nicht eindeutig; jeder Wert größer als c und/oder n_0 erfüllt die Bedingung auch.
- In der Regel sind wir jedoch nicht daran interessiert, die kleinsten Werte von c und n_0 zu finden.

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Bemerkungen zur O-Notation.
  - $O(\cdot)$, als Relation gesehen, ist transitiv:
    $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \rightarrow f \in O(h)$
  - Wenn $g \in O(f)$ und $h \in O(f)$, dann ist $g + h \in O(f)$.
  - Für alle $c > 0$: $O(cf) = O(f + c) = O(f - c) = O(f)$.
  - Wenn $f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2)$ dann
    $f_1 \cdot f_2 \in O(g_1 \cdot g_2)$
    $f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2) \ = \ O(\max(g_1, g_2))$
    $= \ O(g_1)$ wenn $g_2 \in O(g_1)$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Bemerkungen zur O-Notation.
  - $O(\cdot)$, als Relation gesehen, ist transitiv:
    $f \in O(g)$ ∧ $g \in O(h) \rightarrow f \in O(h)$
  - Wenn $g \in O(f)$ und $h \in O(f)$, dann ist $g + h \in O(f)$.
  - Für alle $c > 0$: $O(cf) = O(f + c) = O(f - c) = O(f)$.
  - Wenn $f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2)$ dann
    $f_1 \cdot f_2 \in O(g_1 \cdot g_2)$
    $f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2) = O(\max(g_1, g_2))$
    $= O(g_1)$ wenn $g_2 \in O(g_1)$

$f \in O(g)$

$O(f, g)$

New
Size
Current page size
Style
5mm
7mm
Orientation
Pages
1
OK
Cancel

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Bemerkungen zur O-Notation.
  - $O(\cdot)$, als Relation gesehen, ist transitiv:
    $f \in O(g) \land g \in O(h) \rightarrow f \in O(h)$
  - Wenn $g \in O(f)$ und $h \in O(f)$, dann ist $g + h \in O(f)$.
  - Für alle $c > 0$: $O(cf) = O(f + c) = O(f - c) = O(f)$.
  - Wenn $f_1 \in O(g_1)$ und $f_2 \in O(g_2)$ dann
    $f_1 \cdot f_2 \in O(g_1 \cdot g_2)$
    $f_1 + f_2 \in O(g_1 + g_2) = O(\max(g_1, g_2))$
    $= O(g_1)$ wenn $g_2 \in O(g_1)$

$f \in O(g)$

$O(f, g)$

$g \in O(f)$

$h \in O(f)$

$g + h \in O(f)$

$c_1 \; n_{01} \; |g(n)| \le c_1 f(n)$

$c_2 \; n_{02} \; |h(n)| \le c_2 f(n)$

$\forall n \ge \underbrace{\max\{n_{01}, n_{02}\}}_{n_0} : |g(n) + h(n)| \le |g(n)| + |f(n)|$

$\le \underbrace{(c_1 + c_2)}_{c} f(n)$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Def. (Klein-o-Notation):

$f(n) \in o(g(n))$ genau dann, wenn
$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 : |f(n)| < c \cdot g(n)$

„f wächst echt langsamer als g"

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Def. (Groß-O-Notation): Let $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

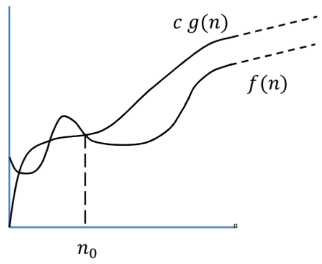
$O(\log n)$

$f(n) \in O(g(n))$ genau dann, wenn
$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \ |f(n)| \leq c \cdot g(n)$

„f wächst (bis auf einen konstanten Faktor) höchstens so schnell wie g“

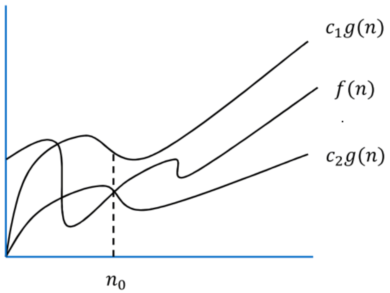
Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Veranschaulichung der Groß-O-Notation:



Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Veranschaulichung der Groß-Θ-Notation:



Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Beispiel

Zeige, dass $f(n) = 30n + 8 \in O(n)$.

Wir müssen also zeigen:

$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 30n + 8 \leq cn$

Nehme:

$30n + 8 \leq 31n$

$c = 31, \quad n_0 = 8.$

Daraus folgt für alle $n \geq n_0$:

$cn = 31n = 30n + n \geq 30n + 8.$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Behauptung:
  $2^n \in o(2^{2n})$

$2^n \equiv x \qquad 2^{2n} = (2^n)^2 \equiv x^2$

$x \in o(x^2)$

- Beweis:

  Z. z: $\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 2^n < c \cdot 2^{2n}$

  Sei $c > 0$ beliebig . Wähle $n_0 = 1 + \log(1/c)$.

  Sei nun $n \geq n_0$ beliebig:

  $c\, 2^{2n} = c\, 2^n\, 2^n \geq c\, 2^{n_0} 2^n = c\, 2\,(1/c)\, 2^n > 2^n$

$\rightarrow 2^n < c \cdot 2^{2n}$

$n < \log_2 c + 2n$

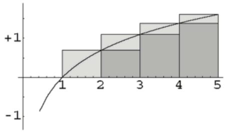
$n > -\log_2 c = \log_2(\frac{1}{c}$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Theorem: $n! \in \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$ und $n! \in O\left(n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Beweis:

$$\forall n > 0: \sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x\, dx < \sum_{k=2}^{n} \ln k < \int_1^{n+1} \ln x\, dx$$

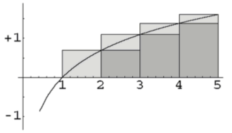


Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Theorem: $n! \in \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$ und $n! \in O\left(n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$

Beweis:

$$\forall n > 0: \sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x\, dx < \sum_{k=2}^{n} \ln k < \int_1^{n+1} \ln x\, dx$$



$\ln x$

$\frac{d}{dx}(\ln x)$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

Beweis (Fortsetzung) :

Es gilt

$$\int_1^n \ln x\, dx = (x \ln x - x)\Big|_1^n = n \ln n - n + 1$$

$$\int_1^{n+1} \ln x\, dx = (n+1) \cdot \ln(n+1) - n$$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Auch ausserhalb der Analyse des Wachstums-verhaltens von Funktionen wird die O-Notation verwendet.
  - z.B., zur Abschätzung von Termen, die nicht besonders wichtig sind.
  - Wenn “$O(g)$” als Term in einem arithmetischen Ausdruck verwendet wird bedeutet dies: “eine Funktion f aus der Menge $O(g)$.”
  - $f + O(g) := \{ f' \mid \exists f'' \in O(g) \colon f' = f + f'' \}$

Kapitel II – Grundlagen; Wachstum

- Auch ausserhalb der Analyse des Wachstums-verhaltens von Funktionen wird die O-Notation verwendet.
  - z.B., zur Abschätzung von Termen, die nicht besonders wichtig sind.
  - Wenn “$O(g)$” als Term in einem arithmetischen Ausdruck verwendet wird bedeutet dies: “eine Funktion f aus der Menge $O(g)$.”
  - $f + O(g) := \{ f' \mid \exists f'' \in O(g) \colon f' = f + f'' \}$

32

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München