Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (14.11.2013)

Date: Thu Nov 14 10:19:45 CET 2013

Duration: 83:58 min

Pages: 37

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Regel für **true**. Für jede A :

$$\frac{}{A \vdash \mathbf{true}}$$

  - Regel für **false**. Für jede A, für jede Formel F :

$$\frac{A \vdash F \qquad A \vdash \neg F}{A \vdash \mathbf{false}}$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Konjunktionseinführung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \qquad A \vdash G}{A \vdash F \wedge G}$$

  - Konjunktionsbeseitigung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F} \qquad \frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F}$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Annahmeregel. Für jede A, für jede Annahme F in A :

$$\frac{}{A \vdash F}$$

  - Ausgeschlossener Dritte. Für jede A, für jede F:

$$\frac{}{A \vdash F \vee \neg F}$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Konjunktionseinführung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \qquad A \vdash G}{A \vdash F \wedge G}$$

  - Konjunktionsbeseitigung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F} \qquad \frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F}$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Implikationseinführung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A, F \vdash G}{A \vdash F \to G}$$

  - Implikationsbeseitigung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \to G \qquad A \vdash F}{A \vdash G}$$

Modus Ponens

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Theorem: Die Regelmenge hat die folgenden zwei Eigenschaften:
    - Wenn $F \vdash G$, dann $F \models G$. (Korrektheit, soundness)
      "Aus der Regelmenge werden nur gültige Inferenzen hergeleitet".
    - Wenn $F \models G$, dann $F \vdash G$. (Vollständigkeit, completeness)
      "Jede gültige Inferenz kann mit der Regelmenge hergeleitet werden ".

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Beispiel eines formalen Beweises.
  - Wir betrachten nochmal die Inferenz

    Wenn

    es heute bewölkt ist, und

    wir nur dann schwimmen gehen, wenn es sonnig ist, und

    wir immer dann rudern, wenn wir nicht schwimmen, und

    wir immer früh nach Hause kommen wenn wir rudern,

    dann

    werden wir heute früh nach Hause kommen.
  - Wir formalisieren sie in der Aussagenlogik und zeigen ihre Korrekheit mit Hilfe der Inferenzregeln.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

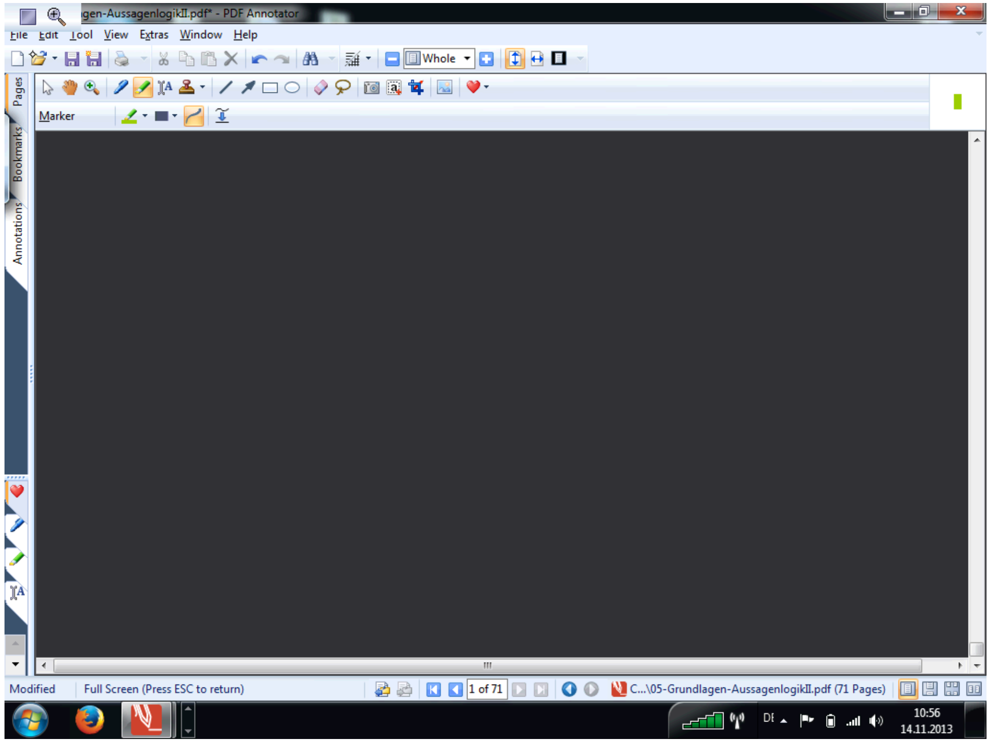
Schritt		Bewiesen durch
1.	A, schwim $\vdash$ schwim	An.
2.	A, schwim $\vdash$ schwim $\rightarrow$ sonnig	An. (b)
3.	A, schwim $\vdash$ $\neg$ sonnig	An. (a)
4.	A, schwim $\vdash$ sonnig	Imp.Bes. 1,2
5.	A, schwim $\vdash$ **false**	**false**.Ein. 3,4
6.	A $\vdash$ schwim $\rightarrow$ **false**	Imp.Ein. 5
7.	A $\vdash$ $\neg$ schwim	Neg.Ein. 6
8.	A $\vdash$ $\neg$ schwim $\rightarrow$ rudern	An. (c)
9.	A $\vdash$ rudern	Imp.Bes. 7,8
10.	A $\vdash$ rudern $\rightarrow$ früh	An. (d)
11.	A $\vdash$ früh	Imp.Bes. 9,10

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Beispiel eines formalen Beweises
  - Eine Herleitung von $A \vdash F$ ist eine endliche Sequenz $A_1 \vdash F_1,\ \ A_2 \vdash F_2, \ldots, A_n \vdash F_n$ mit:
    - $A_n = A$ und $F_n = F$
    - Für alle i, $1 \leq i \leq n$, der Ausdruck $A_i \vdash F_i$ kann aus einer Teilmenge der Ausdrücke $A_1 \vdash F_1, \ldots, A_{i-1} \vdash F_{i-1}$ durch Anwendung einer Regel gewonnen werden.
  - Ein formaler Beweis der Aussage "F folgt aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$" ist eine Herleitung von $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash F$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Zusammenfassung Aussagenlogik
  - Syntax und Semantik.
    - Operatoren und Wahrheitstabellen.
  - Logische Begriffe.
    - Tautologie, Widerspruch, Erfüllbarkeit, Äquivalenz, Folgerung
  - Äquivalenzregeln
  - Vollständige Operatorenmengen.
  - Algorithmen für (Nicht-)Erfüllbarkeit
    - DPLL, Resolution
  - Folgerungsregeln,
    - Formale Beweise



Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Subjekte und Prädikate
  - In dem Satz „*Sokrates ist sterblich*“ ist „*Sokrates*“ das Subjekt (das Individuum, von dem etwas behauptet wird) und „*sterblich*“ das Prädikat (die Eigenschaft, die von dem Individuum behauptet wird).
  - In der Prädikatenlogik wird ein Prädikat als eine Abbildung $P(\cdot)$ von Individuen auf Aussagen, z.B.

$$P(x) = \text{“}x \text{ ist-sterblich”}$$

(wobei x eine Variable ist, die mit Individuen instantiert wird).
  - Aus logischer Sicht ist „*Sokrates ist sterblich*“ eine Abkürzung für „*das Individuum Sokrates hat die Eigenschaft, sterblich zu sein*“.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Mehrstellige Prädikate
  - Der Satz „*Anna liebt Bernhard*“ kann aus logischer Sicht als Abkürzung für

    „*Anna hat die Eigenschaft, Bernhard-zu-lieben*“

    betrachten werden.
  - Dann muss jedoch ein Prädikat für jedes Individuum eingeführt werden: „*Bernhard-zu-lieben*“, „*Cesar-zu-lieben*“, „*Daniel-zu-lieben*“, …
  - Stattdessen wird „*Anna liebt Bernhard*“ als ein Satz über das Paar (Anna, Bernhard) betrachtet. Das Prädikat ist:

    „*das-erste-Individuum-liebt-das-zweite-Individuum*“

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Mehrstellige Prädikate
  - In der Prädikatenlogik wird das durch ein zweistelliges Prädikat $P(\cdot,\cdot)$ modelliert.
  - $P(\cdot,\cdot)$ bildet Paare von Individuen auf Aussagen ab, z.B. $P(x,y) = \text{“}x \text{ liebt } y\text{”}$ (wobei x, y Variablen sind, die mit den Individuen instantiert werden können).
  - Prädikate höherer Arität sind auch möglich

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Funktionen
  - In dem Satz *„Die Mutter von Sokrates ist sterblich”* ist *„Mutter von”* eine Funktion, die jeden Mensch auf seiner Mutter abbildet.
  - In der Prädikatenlogik wird eine Funktion als eine Abbildung $f(\cdot)$ von Individuen auf Individuen , z.B.

    $$m(x) = \text{„Mutter-von-}x\text{”}$$

    (wobei x eine Variable ist, die mit den Individuen instantiert werden kann).
  - Funktionen können höhere Arität haben: z.B. im Satz *„Die Summe der Zahlen 3 und 5 ist 8”* ist “*Summe*” eine Funktion der Arität 2.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Mehrstellige Prädikate
  - In der Prädikatenlogik wird das durch ein zweistelliges Prädikat $P(\cdot,\cdot)$ modelliert.
  - $P(\cdot,\cdot)$ bildet Paare von Individuen auf Aussagen ab, z.B. $P(x,y) = \text{“}x \text{ liebt } y\text{”}$ (wobei x, y Variablen sind, die mit den Individuen instantiert werden können).
  - Prädikate höherer Arität sind auch möglich

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Funktionen
  - In dem Satz *„Die Mutter von Sokrates ist sterblich”* ist *„Mutter von”* eine Funktion, die jeden Mensch auf seiner Mutter abbildet.
  - In der Prädikatenlogik wird eine Funktion als eine Abbildung $f(\cdot)$ von Individuen auf Individuen , z.B.

    $$m(x) = \text{„Mutter-von-}x\text{”}$$

    (wobei x eine Variable ist, die mit den Individuen instantiert werden kann).
  - Funktionen können höhere Arität haben: z.B. im Satz *„Die Summe der Zahlen 3 und 5 ist 8”* ist “*Summe*” eine Funktion der Arität 2.

7

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Das Vokabular setzt sich aus folgenden Zeichenklassen zusammen:
    - (Individuen)variablen: $x, y, z, \ldots$
    - Konstanten: $a, b, c, \ldots$
    - Unäre Prädikatsymbole: $P^1, Q^1, R^1, \ldots$
      Binäre Prädikatsymbole: $P^2, Q^2, R^2, \ldots$ usw.
    - Unäre Funktionssymbole: $f^1, g^1, h^1, \ldots$
      Binäre symbole: $f^2, g^2, h^2, \ldots$ usw.
    - Gleichheitssymbol: $=$
    - Logische Operatoren: $\neg,\ \wedge,\ \vee, \rightarrow$
    - Quantoren: $\forall$ („für alle“), $\exists$ („es gibt“)
    - Hilfssymbole: (,)

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Formationsregeln

Regel 0: jede Variable und jede Konstante ist ein Term.

Regel 1: sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ ebenfalls ein Term.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Formationsregeln

Regel 0: jede Variable und jede Konstante ist ein Term.

Regel 1: sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ ebenfalls ein Term.

Regel 2: sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

Regel 3: sind t und u Terme, dann ist $t = u$ eine Formel.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: Formeln oder Nicht-Formeln?

$P^1(x)$	x
$\forall x\, (f(x) \wedge P^1(x))$	$\forall x\, \exists y\, (x = y \vee \neg Q^1(y))$
$x = P^1(x)$	$\forall x\, P^1(x) = Q^1(f(g(x)))$
$\exists x\, \forall x\, (P^1(x) \wedge Q^2(x, b))$	$\exists x\, f(x)$
$(\forall x\, P^1(a) \wedge Q^1(x))$	$\forall P^1\, \exists x\, P^1(x)$
$P^1(x, y)$	$((P^1(x) \wedge Q^2(a, y)) \vee f(x) = y)$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Formationsregeln

Regel 0: jede Variable und jede Konstante ist ein Term.

Regel 1: sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ ebenfalls ein Term.

Regel 2: sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

Regel 3: sind t und u Terme, dann ist $t = u$ eine Formel.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: Formeln oder Nicht-Formeln?

1 → $P^1(x)$	2 → x
$\forall x\,(f(x) \land P^1(x))$	$\forall x\,\exists y\,(x = y \lor \neg\, Q^1(y))$
Ter $x = P^1(x)$	$\forall x\, P^1(x) = Q^1(f(g(x)))$
→ $\exists x\,\forall x\,(P^1(x) \land Q^2(x,b))$	$\exists x\, f(x)$
$(\forall x\, P^1(a) \land\ Q^1(x))$	$\forall P^1\, \exists x\, P^1(x)$ ←
$P^1(x,y)$	$((P^1(x) \land\ Q^2(a,y)) \lor f(x) = y)$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: Formeln oder Nicht-Formeln?

1 → $P^1(x)$	2 → x
$\forall x\,(f(x) \land P^1(x))$	$\forall x\,\exists y\,(x = y \lor \neg\, Q^1(y))$
Ter $x = P^1(x)$	$\forall x\, P^1(x) = Q^1(f(g(x)))$
→ $\exists x\,\forall x\,(P^1(x) \land Q^2(x,b))$	$\exists x\, f(x)$
$(\forall x\, P^1(a) \land\ Q^1(x))$	$\forall P^1\, \exists x\, P^1(x)$ $\forall x$
$P^1(x,y)$	$((P^1(x) \land\ Q^2(a,y)) \lor f(x) = y)$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Die Stelligkeit der Prädikat- und Funktionssymbolen lassen wir oft weg. Wir nehmen an, dass alle Vorkommisse eines Symbols dieselbe Stelligkeit haben.

    Beispiel: $\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \to P(y,x))$

    Achtung: $\forall x\, (P(x) \land P(x,x))$ ist keine Formel!
  - Manchmal lassen wir Klammern weg, oder fügen welche hinzu. Dabei nehmen wir an, dass Quantoren stärker als Konjunktion, Disjunktion und Implikation binden:

    $\forall x\, P(x) \land Q(y)$ ist die Formel $\big(\forall x\, P(x)\big) \land\ Q(y)$ und nicht $\forall x\, (P(x) \land Q(y))$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Der Gültigkeitsbereich eines Vorkommens einer Variablen x in einer Formel F ist die kleinste Unterformel von F der Gestalt $\forall x\, G$ oder $\exists x\, G$, welche das Vorkommen enthält.

    Wenn es diese Unterformel nicht gibt, dann ist der Gültigkeitsbereich die Formel F selbst.
  - Im ersten Fall heisst das Vorkommen gebunden, sonst ist das Vorkommen frei.
  - Eine Formel ohne freie Vorkommnisse von Variablen heisst geschlossen.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax d
  - Der Gü … einer
    Variabl … te
    Unterfo … $\exists x\ G$,
    welche

    Wenn e … n ist der
    Gültigk
  - Im erst … nden,
    sonst is
  - Eine Fo
    Variabl

New

Size

Current page size

Style

5mm

7mm

Orientation

Pages

1

OK

Cancel

$\forall y\ (P(y) \wedge \exists x\ Q(x,x))$

16

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Der Gültigkeitsbereich eines Vorkommens einer Variablen x in einer Formel F ist die kleinste Unterformel von F der Gestalt $\forall x\ G$ oder $\exists x\ G$, welche das Vorkommen enthält.

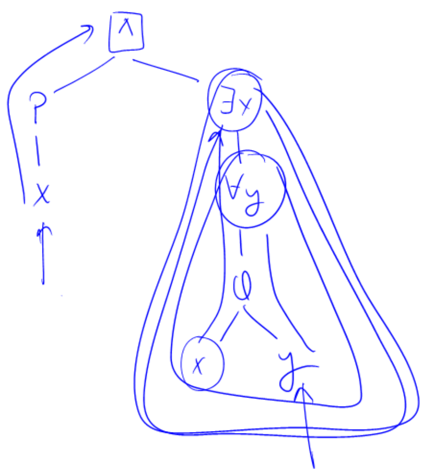
    Wenn es diese Unterformel nicht gibt, dann ist der Gültigkeitsbereich die Formel F selbst.
  - Im ersten Fall heisst das Vorkommen gebunden, sonst ist das Vorkommen frei.
  - Eine Formel ohne freie Vorkommnisse von Variablen heisst geschlossen.

$\forall x\ (P(x) \wedge \boxed{\exists y\ Q(y,y)})$

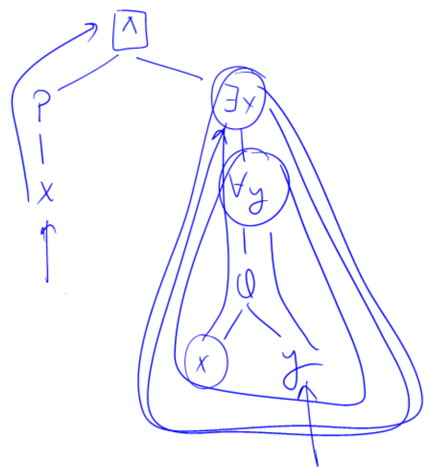
$\forall y\ (P(y) \wedge \exists x\ Q(x,x))$

16

$P(x) \wedge \exists x\ \forall y\ \varphi(x,y)$



$P(x) \wedge \exists x\ \forall y\ \varphi(x,y)$



$P(x)$

$\uparrow$

$\forall x$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Beispiele:

$\exists x\, P(x) \land Q(x)$

Erstes Vorkommen von x ist gebunden, zweites frei.

$\forall x\, (P(x) \land \exists y\, (P(y) \lor Q(x,y)))$

Die Formel ist geschlossen.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Später werden wir definieren, wann zwei Formel äquivalent sind.
  - Es wird folgendes gelten: Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel, in der
    - keine Variable sowohl gebunden wie auch frei vorkommt, und
    - hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene variablen stehen.
  - Meistens werden Formel in bereignigten Form dargestellt. In diesem Fall kann man von freien und gebundenen Variablen einer Formel sprechen.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Beispiele:

$\exists x\, P(x) \land Q(x)$

Erstes Vorkommen von x ist gebunden, zweites frei.

$\forall x\, (P(x) \land \exists y\, (P(y) \lor Q(x,y)))$

Die Formel ist geschlossen.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Syntax der Prädikatenlogik
  - Später werden wir definieren, wann zwei Formel äquivalent sind.
  - Es wird folgendes gelten: Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel, in der
    - keine Variable sowohl gebunden wie auch frei vorkommt, und
    - hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene variablen stehen.
  - Meistens werden Formel in bereignigten Form dargestellt. In diesem Fall kann man von freien und gebundenen Variablen einer Formel sprechen.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe

	Nicht-Formel	Formel	Bereig. Formel
$\forall x\, P(a)$			
$\forall x \exists y\, (P(x,y) \lor Q(x,y))$			
$\forall x\, Q(x,x) \rightarrow \exists x\, Q(x,y)$			
$\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x,x)$			
$\forall x\, (P(x) \land \forall y\, P(x))$			
$P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x, P(x))$			
$\forall x \exists x\, P(x, f(x))$			

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Semantik der Prädikatenlogik: Intuition
  - Die Semantik einer Formel ist die Funktion, die jede mögliche „Welt“, die zur Formel „passt“, dem Wahrheitswert der Formel (0 oder 1) in dieser „Welt“ zuordnet.
  - Eine Welt, die zu $F = \forall x\, P(a,x)$ passt, und in der F wahr ist (meiner Meinung nach …).
    - Die Individuen der Welt sind alle lebenden Schauspielerinnen.
    - a ist Emma Stone
    - $P(y,x)$ bedeutet „y ist mindestens so attraktiv wie x“