Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (12.11.2013)

Date: Tue Nov 12 13:45:23 CET 2013

Duration: 90:06 min

Pages: 25

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Algorithmen für KNF-SAT
  - Wir präsentieren zwei Algorithmen:
    - DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland).
      - Versucht, die Anzahl der zu prüfenden Belegungen zu reduzieren
      - Auf Erfüllbarkeit gerichtet: kann früh terminieren, wenn die Formel erfüllbar ist.
      - Wir präsentieren nur eine vereinfachte Version.
    - Resolution (Robinson).
      - Auf Nicht-Erfüllbarkeit gerichtet: kann früh Terminieren, wenn die Formel nicht erfüllbar ist.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland).

Beispiel:

$$F = (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge p$$

$$F[p\backslash \mathbf{true}] = (\mathbf{true} \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg \mathbf{true} \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge \mathbf{true}$$

$$\equiv (\mathbf{true} \vee \neg q \vee r) \wedge (\mathbf{false} \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r)$$

$$\equiv \mathbf{true} \wedge \neg r \wedge (q \vee \neg r)$$

$$\equiv \neg r \wedge (q \vee \neg r)$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution mit Mengendarstellung.
  - Beispiel: wenn die Formel Klauseln p und $\neg p$ enthält, dann kann die Klausel false hinzugefügt werden.

  Die Klauseln sind äquivalent zu

  $$p \qquad p \rightarrow \mathbf{false} \qquad \mathbf{false}$$

  Die neue Klausel zeigt, dass die Formel nicht erfüllt werden kann.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution.
  - Grundidee: füge iterativ neue Klauseln zur Formel hinzu, die logische Konsequenzen der ursprunglichen Klauseln sind.
  - Beispiel: wenn die Formel Klauseln $(\neg p \vee q \vee r)$ und $(\neg r \vee s \vee t)$ enthält, dann kann die Klausel $(\neg p \vee q \vee s \vee t)$ hinzugefügt werden.

    Die Klauseln sind äquivalent zu

    $\underbrace{(p \wedge \neg q) \rightarrow r}_{F}$ $\quad \underbrace{r \rightarrow (s \vee t)}_{G}$ $\quad \underbrace{(p \wedge \neg q) \rightarrow (s \vee t)}_{H}$

    $F, G \models H$

    $\underbrace{\square \wedge F \wedge G}_{1} \equiv \underbrace{\square \wedge F \wedge G \wedge H}_{1}$

29

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution mit Mengendarstellung.

  Definition. Seien K_1, K_2 und R Klauseln in Mengendarstellung. Dann heißt R resolvent von K_1 und K_2, wenn es ein Literal L gibt mit $L \in K_1$ und $\bar{L} \in K_2$ und

  $$R = (K_1 \setminus \{L\}) \cup (K_2 \setminus \{\bar{L}\})$$

  Hierbei ist $\bar{L}$ definert als

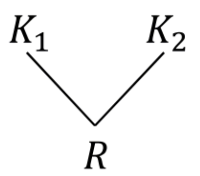
  $$\bar{L} = \begin{cases} \neg p & \text{falls } L = p \\ p & \text{falls } L = \neg p \end{cases}$$

31

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution.

  Wir stellen diesen Sachverhalt durch folgendes Diagramm dar:



Die leere Klausel wird mit dem Symbol „□“ bezeichnet

32

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Das Resolutionsverfahren

  while F die leere Klausel nicht enthält
  { if F zwei Klauseln K_1, K_2 enthält
  mit einem Resolventen R, der $R \notin F$
  erfüllt (d.h., R ist nicht Klausel von F)
  then füge R als neue Klausel zu F hinzu
  else antworte „erfüllbar“ und halte
  }
  antworte „unerfüllbar“ und halte

33

Kapitel II – Grundlagen; Logik

$\{\neg q, s\}$ $\{\neg p, q, s\}$ $\{p\}$ $\{r, \neg s\}$ $\{\neg p, \neg r, \neg s\}$

34

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution.

  Fakt. Sei F eine Formel in KNF-Form. Wenn R resolvent zweier Klauseln von F ist, dann gilt

  $$F \equiv F \cup \{R\}\,.$$

  Begründung.

  Seien K_1, K_2 die durch R resolvierten Klauseln mit $K_1 = K_1' \vee A$ und $K_2 = K_2' \vee \neg A$. Es gibt F' mit

  $$F = F' \wedge (K_1' \vee A) \wedge (K_2' \vee \neg A)$$
  $$\equiv F' \wedge (K_1' \vee A) \wedge (K_2' \vee \neg A) \wedge (K_1' \vee K_2')$$
  $$\equiv F' \wedge (K_1' \vee A) \wedge (K_2' \vee \neg A) \wedge R$$
  $$\equiv F \vee R$$

50

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution.

  Aus dem Lemma folgt: wenn irgendwann die leere Klausel hinzugefügt wird (d.h., wenn das Verfahren „unerfüllbar“ antwortet), dann gilt

  $$F \equiv F \wedge \mathbf{false} \equiv \mathbf{false}$$

  und somit ist die Formel F unerfüllbar.

  Man muss noch zeigen:

  - Wenn das Verfahren „erfüllbar“ antwortet, dann ist die Formel erfüllbar. (Kommt später in der Vorlesung)
  - Das Verfahren terminiert. (Folgt aus der Tatsache, dass es endlich viele Klauseln mit n Variablen gibt.)

51

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution

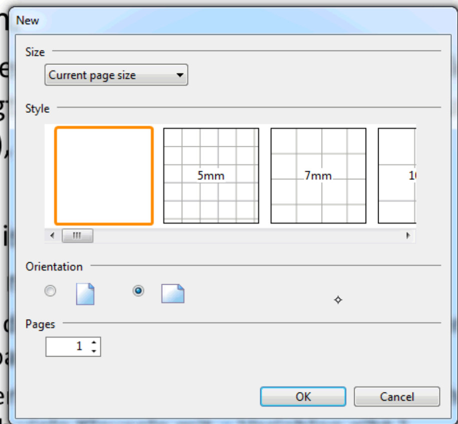
  Aus dem Le … eere Klausel
  hinzugefüg … nerfüllbar“
  antwortet), …

  $\{p\}$ $\{\neg p\}$

  und somit i …

  Man muss …

  - Wenn … n ist die Formel erfüllba …
  - Das Ve … e, dass es endlich viele Klauseln mit n Variablen gibt.)



51

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution
  - Korrektheit der Resolution.
    1. Das Verfahren terminiert für jede Eingabeformel.
       Folgt daraus, dass es nur endlich viele Klauseln aus einer endlichen Menge von Variablen konstruiert werden können.
    2. Wenn die Formel erfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „erfüllbar“.
       Folgt aus dem Fakt.
    3. Wenn die Formel unerfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „unerfüllbar“.
       Schwieriger. Wird später in der Vorlesung

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen.
  - Wir beschreiben eine Menge von Inferenzregeln (ein Kalkül),
    Mit den Inferenzregeln können Ausdrücke der Gestalt

$$A \vdash F$$

mechanisch erzeugt werden, wobei A eine Konjunktion von Annahmen und F eine Formel ist.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Resolution
  - Korrektheit der Resolution.
    1. Das Verfahren terminiert für jede Eingabeformel.
       Folgt daraus, dass es nur endlich viele Klauseln aus einer endlichen Menge von Variablen konstruiert werden können.
    2. Wenn die Formel erfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „erfüllbar“.
       wenn "unerfüllbar" dann unerfüllbar
       Folgt aus dem Fakt.
    3. Wenn die Formel unerfüllbar ist, dann antwortet das Verfahren „unerfüllbar“.
       Schwieriger. Wird später in der Vorlesung

$\{p, q, r, s, t\}$ $\{\neg p, u, v, w\}$

$\{q, r, s, t, u, v, w\}$

$\{p, q, r, s, t, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s, \neg t\}$ 10

n $\qquad 2^{10}$

$2n$

2^{2n} $\quad 4^n$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen.
  - Es wird gelten:

    $$A \vdash F \text{ gdw. } A \models F$$

  - Das Kalkül bietet damit eine alternative zum Folgerungstest.
  - Die Regeln sind ähnlich zu den Formationsregeln:
    - Basisregeln: "$A \vdash F$ für die Konjunktion A und die Formel F"
    - Induktive Regeln: "wenn $A \vdash F_1, \ldots, A \vdash F_n$, dann $B \vdash F$ "

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen.
  - Es wird gelten:

    $$A \vdash F \text{ gdw. } A \models F$$

  - Das Kalkül bietet damit eine alternative zum Folgerungstest.
  - Die Regeln sind ähnlich zu den Formationsregeln:
    - Basisregeln: "$A \vdash F$ für die Konjunktion A und die Formel F"
    - Induktive Regeln: "wenn $A \vdash F_1, \ldots, A \vdash F_n$, dann $B \vdash F$ "

54

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Grafische Darstellung der Basisregeln:

    $$\frac{}{A \vdash F}$$

  - Grafische Darstellung der induktiven Regeln

    $$\frac{A_1 \vdash F_1, \ldots, A_n \vdash F_n}{B \vdash F}$$

  Intuition: um $B \vdash F$ zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $A \vdash F_1$ und $A_2 \vdash F_2$ und … und $A_n \vdash F_n$ gelten.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Beispiel eines formalen Beweises.
  - Wir betrachten nochmal die Inferenz

    Wenn
    es heute bewölkt ist, und
    wir nur dann schwimmen gehen, wenn es sonnig ist, und
    wir immer dann rudern, wenn wir nicht schwimmen, und
    wir immer früh nach Hause kommen wenn wir rudern,
    dann
    werden wir heute früh nach Hause kommen.

  - Wir formalisieren sie in der Aussagenlogik und zeigen ihre Korrekheit mit Hilfe der Inferenzregeln.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Theorem: Die Regelmenge hat die folgenden zwei Eigenschaften:
    - Wenn $F \vdash G$, dann $F \vDash G$. (Korrektheit, soundness)

      "Aus der Regelmenge werden nur gültige Inferenzen hergeleitet".
    - Wenn $F \vDash G$, dann $F \vdash G$. (Vollständigkeit, completeness)

      "Jede gültige Inferenz kann mit der Regelmenge hergeleitet werden".

15

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen.
  - Es wird gelten:

$$A \vdash F \text{ gdw. } A \vDash F$$

  - Das Kalkül bietet damit eine alternative zum Folgerungstest.
  - Die Regeln sind ähnlich zu den Formationsregeln:
    - Basisregeln: "$A \vdash F$ für die Konjunktion A und die Formel F"
    - Induktive Regeln: "wenn $A \vdash F_1, \ldots, A \vdash F_n$, dann $B \vdash F$"

Kapitel II – Grundlagen; Logik

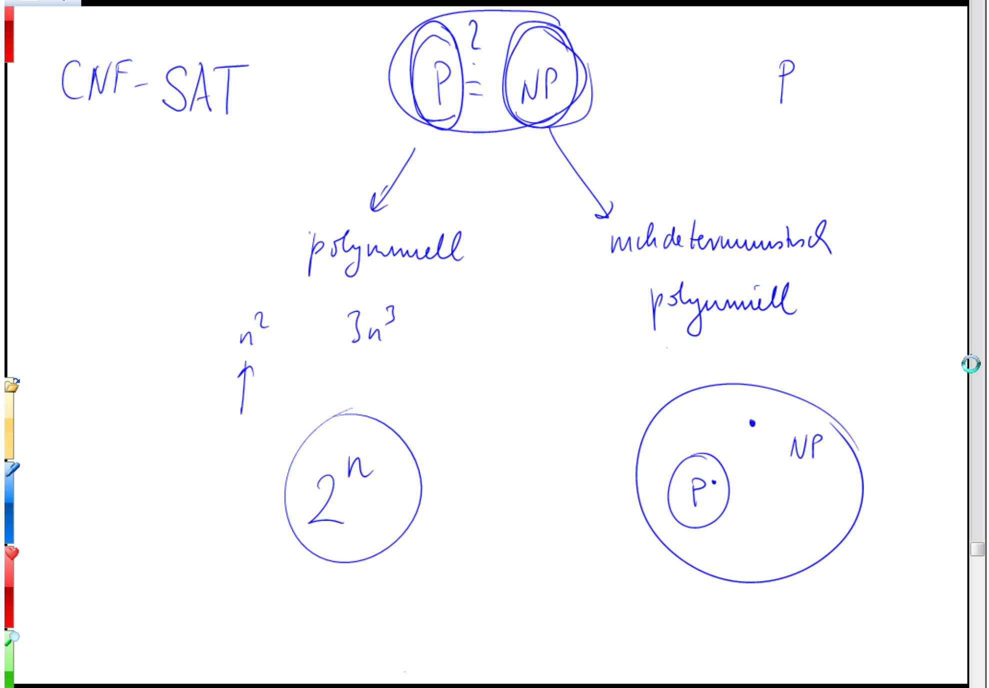
- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Grafische Darstellung der Basisregeln:

$$\frac{}{A \vdash F}$$

  - Grafische Darstellung der induktiven Regeln

$$\frac{A_1 \vdash F_1, \ldots, A_n \vdash F_n}{B \vdash F}$$

Intuition: um $B \vdash F$ zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $A \vdash F_1$ und $A_2 \vdash F_2$ und … und $A_n \vdash F_n$ gelten.



Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen

  – Annahmeregel. Für jede A, für jede Annahme F in A :

$$\frac{}{A \vdash F}$$

  – Ausgeschlossener Dritte. Für jede A, für jede F:

$$A \vdash F \vee \neg F$$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  – Konjunktionseinführung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \qquad A \vdash G}{A \vdash F \wedge G}$$

  – Konjunktionsbeseitigung. Für alle A, für alle F, G :

$$\frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F} \qquad \frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F}$$