Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (31.10.2013)

Date: Thu Oct 31 10:15:04 CET 2013

Duration: 95:23 min

Pages: 39

F

$[F]$: Belegungen, die zu F passen $\longrightarrow \{0,1\}$

$\boxed{p \wedge q}$

$\beta_1 \begin{cases} p \mapsto 0 \\ q \mapsto 1 \\ r \mapsto 0 \end{cases}$ $s \mapsto 0$

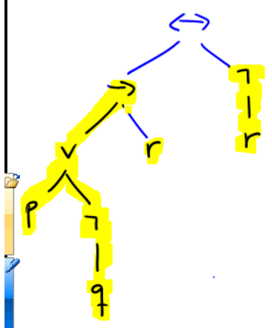
$\beta_2 \begin{cases} p \mapsto 0 \\ q \mapsto 1 \\ r \mapsto 1 \end{cases}$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Wahrheitstabellen
  - Sei F eine Formel, und sei V_F die Menge der Variablen, die in F vorkommen.
  - Eine Belegung, die zu F passt, ist minimal für F wenn $V_F = V$ $\beta : V \to \{0,1\}$
  - Sei β eine Belegung, die zu F passt, und sei β_F die Projektion von β auf V_F. Dann ist β_F ist eine minimale Belegung und es gilt: $[F](\beta) = [F](\beta_F)$.
  - Das heisst: die Funktion $[F]$ wird von den minimalen Belegungen eindeutig bestimmt.
  - Die Wahrheitstabelle von F enthält als Zeilen die minimalen Belegungen von F und die entsprechenden Werte von $[F]$.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Berechnung der Wahrheitstabelle einer Formel.



p	q	r	$((p \vee \neg q) \to r) \leftrightarrow \neg r$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

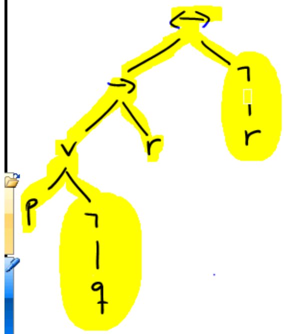
Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Berechnung der Wahrheitstabelle einer Formel.

p	q	r	$((p$	$\lor$	$\neg$	$q)$	$\to$	$r)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	r
0	0	0	0			0		0			0
0	0	1	0			0		1			1
0	1	0	0			1		0			0
0	1	1	0			1		1			1
1	0	0	1			0		0			0
1	0	1	1			0		1			1
1	1	0	1			1		0			0
1	1	1	1			1		1			1

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Berechnung der Wahrheitstabelle einer Formel.



p	q	r	$((p \lor \neg q) \to r) \leftrightarrow \neg r$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

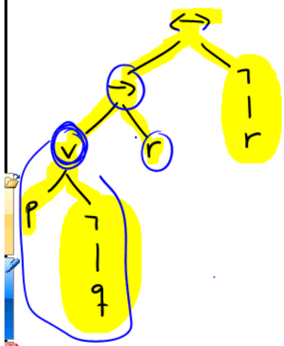
Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Berechnung der Wahrheitstabelle einer Formel.

p	q	r	$((p$	$\lor$	$\neg$	$q)$	$\to$	$r)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	r
0	0	0	0	1	1	0	0	0		1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1		0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0		1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1		0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0		1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1		0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0		1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1		0	1

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Berechnung der Wahrheitstabelle einer Formel.



p	q	r	$((p \lor \neg q) \to r) \leftrightarrow \neg r$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Berechnung der Wahrheitstabelle einer Formel.

p	q	r	$(($p$	$\lor$	$\neg$	$q)$	$\rightarrow$	$r)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	r
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- (Allgemein)gültigkeit, Tautologie.
  - Eine Formel F ist gültig genau dann, wenn für jede minimale Belegung β, die zu F passt, gilt: $[F](\beta) = 1$.
  - Tautologietest: berechne die Wahrheitstabelle und prüfe, ob die Spalte für F ausschließlich Einsen enthält.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Allgemeingültigkeit, Tautologie.
  - Beispiele von Tautologien:

$p \lor \neg p$

$(p \land q) \rightarrow p$

$p \rightarrow (p \lor q)$

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$

$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

p	q	p	→	(q	→	p)
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Erfüllbarkeit.
  - Eine Formel F ist erfüllbar wenn es eine Belegung β gibt, die zu F passt, und $[F](\beta) = 1$ erfüllt.
  - Intuitiv: eine Formel ist erfüllbar wenn sie in mindestens einer Welt wahr ist.
  - Erfüllbarkeitstest: berechne die Wahrheitstabelle und prüfe, ob die Spalte für F mindestens eine 1 enthält.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Widerspruch.
  - Eine Formel F ist ein Widerspruch wenn für jede Belegung β, die zu F passt, gilt: $[F](\beta) = 0$.
  - Intuitiv: eine Formel ist ein Widerspruch wenn sie überall (“in allen Welten”) falsch ist.
  - Eine Formel F ist ein Widerspruch genau dann, wenn für jede minimale Belegung β, die zu F passt, gilt: $[F](\beta) = 0$.
  - Widerspruchstest: berechne die Wahrheitstabelle und prüfe, ob die Spalte für F ausschliesslich Nullen enthält.

$\overline{F}$

$\neg F$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Erfüllbarkeit.
  - Eine Formel F ist erfüllbar wenn es eine Belegung β gibt, die zu F passt, und $[F](\beta) = 1$ erfüllt.
  - Intuitiv: eine Formel ist erfüllbar wenn sie in mindestens einer Welt wahr ist.
  - Erfüllbarkeitstest: berechne die Wahrheitstabelle und prüfe, ob die Spalte für F mindestens eine 1 enthält.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Erfüllbarkeit.
  - Das Erfüllbarkeitsproblem (satisfiability problem, SAT) ist eines der am meisten untersuchten Problemen der ganzen Informatik:
    - Gegeben: eine aussagenlogische Formel F
    - Entscheiden: ob F erfüllbar ist.

2^n

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe.

nicht gültig aber

	Gültig	Erfüllbar	Widerspruch
p		x	
$p \vee q$		x	
$p \vee \neg p$			
$p \wedge \neg p$			x
$p \to \neg p$		?	
$p \to q$			
$p \to (q \to p)$			
$p \to (p \to q)$			
$\neg p \to p$		x	

1 0

	p	$\to$	$\neg$	p
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: Stimmt es oder nicht?

	J/N	Gegenbeispiel
Wenn F gültig, dann F erfüllbar	J	
Wenn F erfüllbar, dann $\neg F$ unerfüllbar	N	p
Wenn F gültig, dann $\neg F$ unerfüllbar		
Wenn F unerfüllbar, dann $\neg F$ gültig		

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Logische Äquivalenz $\quad p \equiv p \wedge p$
  - Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (symbolisch: $F \equiv G$) genau dann, wenn für jede Belegung β, die zu F und zu G passt, gilt: $[F](\beta) = [G](\beta)$

    Intuitiv: wenn F und G äquivalent sind, dann sind sie zwei verschiedene Schreibweisen der selben Aussage.
  - Sei V die Menge der Variablen, die in F oder G vorkommen. F und G sind äquivalent genau dann, wenn für jede Belegung $\beta: V \to \{0,1\}$ gilt: $[F](\beta) = [G](\beta)$.
  - Äquivalenztest: Konstruiere die Wahrheitstabelle von $F \leftrightarrow G$ und prüfe, ob die Spalte für $F \leftrightarrow G$ ausschliesschlich Einsen enthält.

$p \vee \neg p$

$q \vee \neg q$

$(p \vee \neg p) \wedge q \qquad q \wedge (r \vee \neg r)$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: stimmt es oder nicht?

F	G	F $\equiv$ G
$p \wedge (p \vee q)$	p	Ja
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \vee \neg q$	Nein
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$	
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Logischen Inferenzen: Formalisierung.
  - Eine logische Inferenz ist eine Formel der Gestalt $F \to G$. Dabei ist F die Annahme und G die Konklusion. Eine logische Inferenz ist korrekt wenn sie gültig ist.
  - Notation: $F \models G$ (in Worten: G folgt aus F) bezeichnet, dass $F \to G$ gültig ist.

    Achtung! "G folgt aus F" ist nicht dasselbe wie "F impliziert G"

$F \to G \qquad F \to G$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Logischen Inferenzen: Formalisierung.
  - Fast immer ist die Annahme F eine Konjunktion $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$. Man spricht dann von den Annahmen $F_1, \ldots F_n$.
  - Statt $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \vDash F$ schreibt man $F_1, \ldots, F_n \vDash F$.
  - Folgerungstest: berechne die Wahrheitstabelle und prüfe, ob die Spalte für $F \rightarrow G$ ausschließlich Einsen enthält.

$((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3)$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: stimmt es oder nicht?

A	F	A ⊨ F
p	$p \vee q$	Ja
p	$p \wedge q$	Nein
p, q	$p \vee q$	Ja
p, q	$p \wedge q$	
$p \wedge q$	p	
$p \vee q$	p	
$p, p \rightarrow q$	q	

$p \wedge q$

$p \vDash p \vee q$

$p \rightarrow (p \vee q)$

$p, q \vDash p \vee q$

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

$p \wedge (p \rightarrow q) \vDash q$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Beziehungen
  - F ist gültig (eine Tautologie), genau dann, wenn
    - $\neg F$ ist ein Widerspruch.
    - $F \equiv$ **true**
    - **true** $\vDash F$
  - F ist ein Widerspruch, genau dann, wenn
    - $\neg F$ ist gültig.
    - $F \equiv$ **false**
    - $F \vDash$ **false**

$F \leftrightarrow true$

$false \rightarrow F$

$A \vDash F$

$true \vDash F$

$false \vDash F$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Beziehungen
  - F ist erfüllbar genau dann, wenn
    - $\neg F$ ist nicht gültig
  - $F \equiv G$ gilt, genau dann, wenn
    - $F \leftrightarrow G$ ist eine Tautologie

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Aufgabe: Wahr oder falsch?
  - Eine Formel F ist eine Tautologie, genau dann, wenn $\neg F$ ein Widerspruch ist.
  - Eine Formel F ist keine Tautologie, genau dann, wenn $\neg F$ erfüllbar ist.
  - Wenn F ein Widerspruch ist, dann ist $F \rightarrow G$ eine Tautologie.
  - F ist ein Widerspruch genau dann, wenn $F \equiv$ **false** .
  - F ist ein Widerspruch genau dann, wenn $F \rightarrow$ **false** .

Kapitel II - Grundlagen

- Eigenschaften der Äquivalenz $F \equiv G$
  - Die Relation $\equiv$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. $F \Leftrightarrow G$

    Damit ist $\equiv$ eine Äquivalenzelation (wie zu erwarten war).
  - Diese Transitivität erlaubt es, die Äquivalenz zweier Formeln F und G nachzuweisen , in dem man eine Kette von Äquivalenzen

$$F \equiv F_1 \equiv F_2 \cdots \equiv F_n \equiv G$$

angibt.

Das ist eine alternative Methode zur Wahrheitstabelle.

P

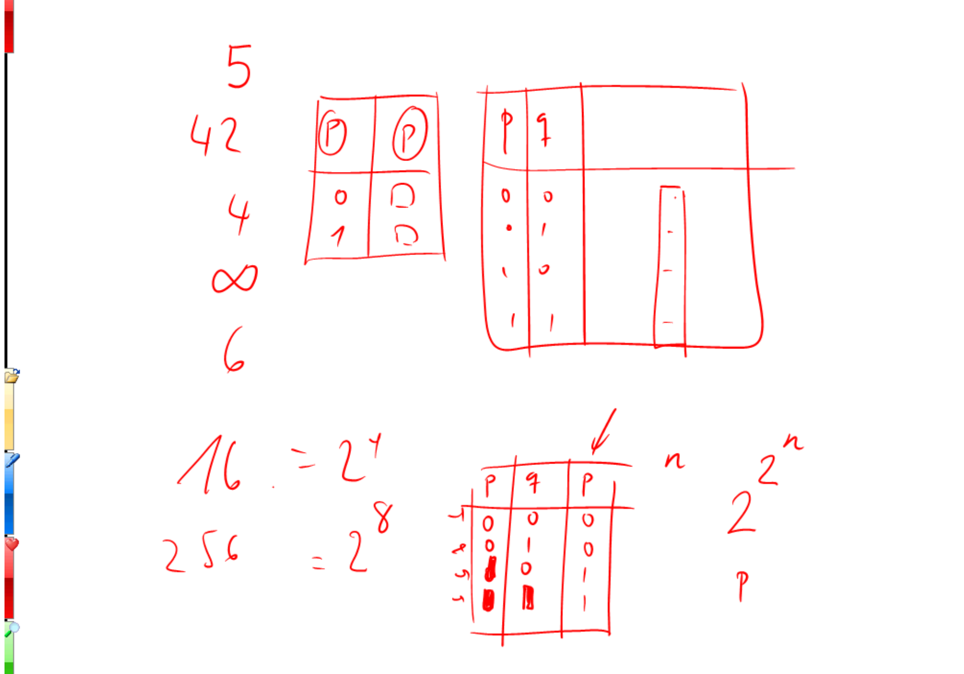
$P \wedge P$

$(P \wedge P) \wedge P$

$P \vee P$

$(P \wedge (q \vee q))$

P, q

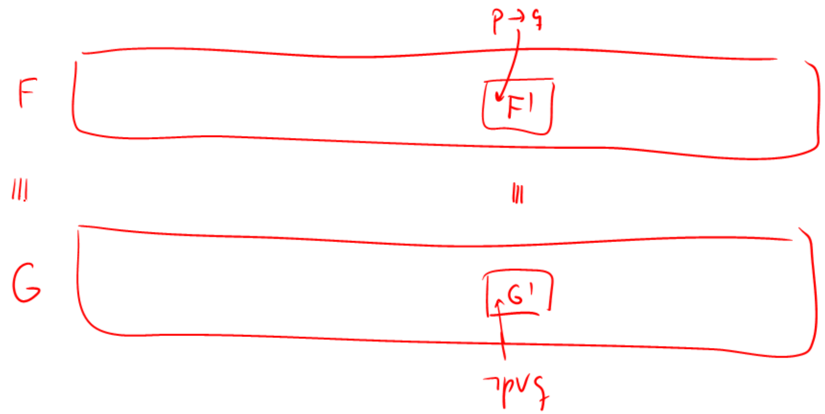


Kapitel II - Grundlagen

- Eigenschaften der Äquivalenz
  - Die Relation $\equiv$ ist eine Kongruenz. Das heißt: wenn in einer Formel F eine Teilformel durch eine äquivalente Formel ersetzt wird, dann ist die resultierende Formel äquivalent zu F.
  - Die Kongruenz-Eigenschaft erla... es ... eine Ä... $F_i \equiv F_{i+1}$ zu finden, in dem ma... F_i durch eine äquivalente Form...

Select | Insert Page | Append Page | Delete Page | Clone Page | Extract Page | Move Page Up | Move Page Down | Rotate Clockwise | Rotate Counterclockwise | Crop Pages... | Add Margins...

Cut Ctrl+X | Copy Ctrl+C | Paste Ctrl+V | Delete Del | Selection | Page | Close Menu Esc



Kapitel II - Grundlagen

- Vergleich mit arithmetischen Ausdrücken:
  - Syntax:
    - 0,1,2, ... sind arithmetische Ausdrücke   + × ( )
    - Wenn A und B arithmetische Ausdrücke sind, dann sind $(A + B)$ und $(A \times B)$ auch arithmetische Ausdrücke
  - Semantik eines Ausdrucks: eine natürliche Zahl
  - Relation „=„ : zwei Ausdrücke sind äquivalent, wenn ihre Semantik dieselbe Zahl ist.
    - $3 + 4 = 2 + 5 \quad 3 + (5 \times 4) = 17 + 6$

Kapitel II - Grundlagen

- Vergleich mit arithmetischen Ausdrücken:
  - Die Relation „=„ ist eine Äquivalenzrelation und eine Kongruenz.
  - Beweis, dass $(\underbrace{9 + 7}_{16}) \times (3 + (\underbrace{4 \times 2}_{8})) = 176$:

$$
\begin{aligned}
(9 + 7) \times (3 + (4 \times 2)) &= (9 + 7) \times (3 + 8) \\
&= 16 \times (3 + 8) \\
&= 16 \times 11 \\
&\dots \\
&= 176
\end{aligned}
$$

Kapitel II - Grundlagen

- Vergleich mit arithmetischen Ausdrücken:
  - Syntax:
    - 0,1,2, ... sind arithmetische Ausdrücke   + × ( )
    - Wenn A und B arithmetische Ausdrücke sind, dann sind $(A + B)$ und $(A \times B)$ auch arithmetische Ausdrücke
  - Semantik eines Ausdrucks: eine natürliche Zahl
  - Relation „=„ : zwei Ausdrücke sind äquivalent, wenn ihre Semantik dieselbe Zahl ist.
    - $3 + 4 = 2 + 5 \quad 3 + (5 \times 4) = 17 + 6$

84
Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln
  - Um Äquivalenzketten zu konstruieren können wir Äquivalenzregeln verwenden: Äquivalenzschemen, die instanziert werden können, um äquivalente Formeln zu gewinnen.
  - Äquivalenzregeln enthalten Formelvariablen (Platzhalter für Formeln).
  - Beispiel: Die Regel $(F \vee G) \wedge H \equiv (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$ sagt: "Für alle Formeln F, G, H gilt: $(F \vee G) \wedge H$ und $(F \wedge H) \vee (G \wedge H)$ sind äquivalent"

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln
  - Eine Regel kann mit verschiedenen Formeln instanziert werden:

$(F \vee G) \wedge H \equiv (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

$\boxed{(\underbrace{(p \rightarrow q)}_{F} \vee \underbrace{q}_{G}) \wedge \underbrace{\neg p}_{H} \equiv ((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)}$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln
  - Wie zeigt man, dass eine Regel korrekt ist? Jede Instanz kann mit einer Wahrheitstabelle geprüft werden, aber es gibt unendlich viele Instanzen!
  - Die folgende Eigenschaft (ohne Beweis) gibt die Lösung:

    Eine Regel ist korrekt genau dann, wenn sie korrekt ist für die Instanz, in der die Formelvariablen F, G, H ... jeweils durch die Variablen p, q, r, ... ersetzt werden.
  - D.h.: Um die Korrektheit einer Regel nachzuweisen reicht es zu zeigen, dass sie für diese eine Instanz gilt. Das kann mit einer Wahrheitstabelle gemacht werden.

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln für $\wedge, \vee, \neg$
  - Identität: $F \wedge \textbf{true} \equiv F$, $F \vee \textbf{false} \equiv F$
  - Dominanz: $\cancel{F} \vee \textbf{true} \equiv \textbf{true}$, $F \wedge \textbf{false} \equiv \textbf{false}$
  - Idempotenz: $F \vee F \equiv F$, $F \wedge F \equiv F$
  - Doppelte Negation: $\neg\neg F \equiv F$
  - Triviale Tautologie/Kontradiktion: $F \vee \neg F \equiv \textbf{true}$, $F \wedge \neg F \equiv \textbf{false}$

$p \wedge \text{true} \equiv p$

$(p \wedge \text{true}) \leftrightarrow p$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln für andere Operatoren
  - Mit Hilfe von Äquivalenzregeln lassen sich logische Operatoren durch andere Operatoren ausdrücken.
  - Exklusives-Oder: $F \otimes G \equiv (F \vee G) \wedge \neg (F \wedge G)$
    $F \otimes G \equiv (F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)$
  - Implikation: $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$
    $F \vee G \equiv \neg F \rightarrow G$
  - Bikonditional: $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
    $F \leftrightarrow G \equiv \neg (F \otimes G)$

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln für ∧, ∨, ¬

$(F \rightarrow G) \rightarrow H \not\equiv F \rightarrow (G \rightarrow H)$

  - Kommutativität: $F \vee G \equiv G \vee F$
    $F \wedge G \equiv G \wedge F$
  - Assoziativität: $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$ $F \vee G \vee H$
    $(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$
  - Distributivität: $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
    $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
  - De Morgan's: $\neg (F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
    $\neg (F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

Augustus De Morgan (1806-1871)

Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Äquivalenzregeln für andere Operatoren
  - Mit Hilfe von Äquivalenzregeln lassen sich logische Operatoren durch andere Operatoren ausdrücken.
  - Exklusives-Oder: $F \otimes G \equiv (F \vee G) \wedge \neg (F \wedge G)$
    $F \otimes G \equiv (F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)$
  - Implikation: $\boxed{\overset{1}{F} \overset{0}{\rightarrow} \overset{0}{G} \equiv \overset{1}{\neg F} \vee \overset{0}{G}}$
    $F \vee G \equiv \neg F \rightarrow G$
  - Bikonditional: $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
    $F \leftrightarrow G \equiv \neg (F \otimes G)$

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$