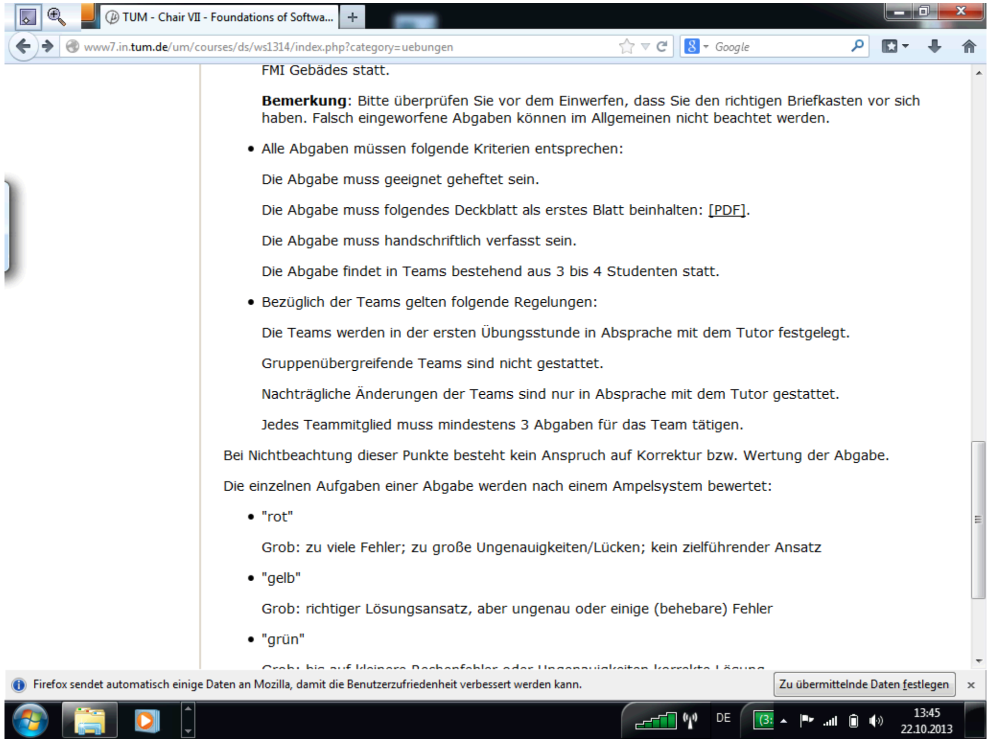
Script **generated by TTT**

Title: Esparza: Diskrete Strukturen (22.10.2013)

Date: Tue Oct 22 13:45:26 CEST 2013

Duration: 90:49 min

Pages: 44



FMI Gebädes statt.

Bemerkung: Bitte überprüfen Sie vor dem Einwerfen, dass Sie den richtigen Briefkasten vor sich haben. Falsch eingeworfene Abgaben können im Allgemeinen nicht beachtet werden.

- Alle Abgaben müssen folgende Kriterien entsprechen:

  Die Abgabe muss geeignet geheftet sein.

  Die Abgabe muss folgendes Deckblatt als erstes Blatt beinhalten: [PDF].

  Die Abgabe muss handschriftlich verfasst sein.

  Die Abgabe findet in Teams bestehend aus 3 bis 4 Studenten statt.

- Bezüglich der Teams gelten folgende Regelungen:

  Die Teams werden in der ersten Übungsstunde in Absprache mit dem Tutor festgelegt.

  Gruppenübergreifende Teams sind nicht gestattet.

  Nachträgliche Änderungen der Teams sind nur in Absprache mit dem Tutor gestattet.

  Jedes Teammitglied muss mindestens 3 Abgaben für das Team tätigen.

Bei Nichtbeachtung dieser Punkte besteht kein Anspruch auf Korrektur bzw. Wertung der Abgabe.

Die einzelnen Aufgaben einer Abgabe werden nach einem Ampelsystem bewertet:

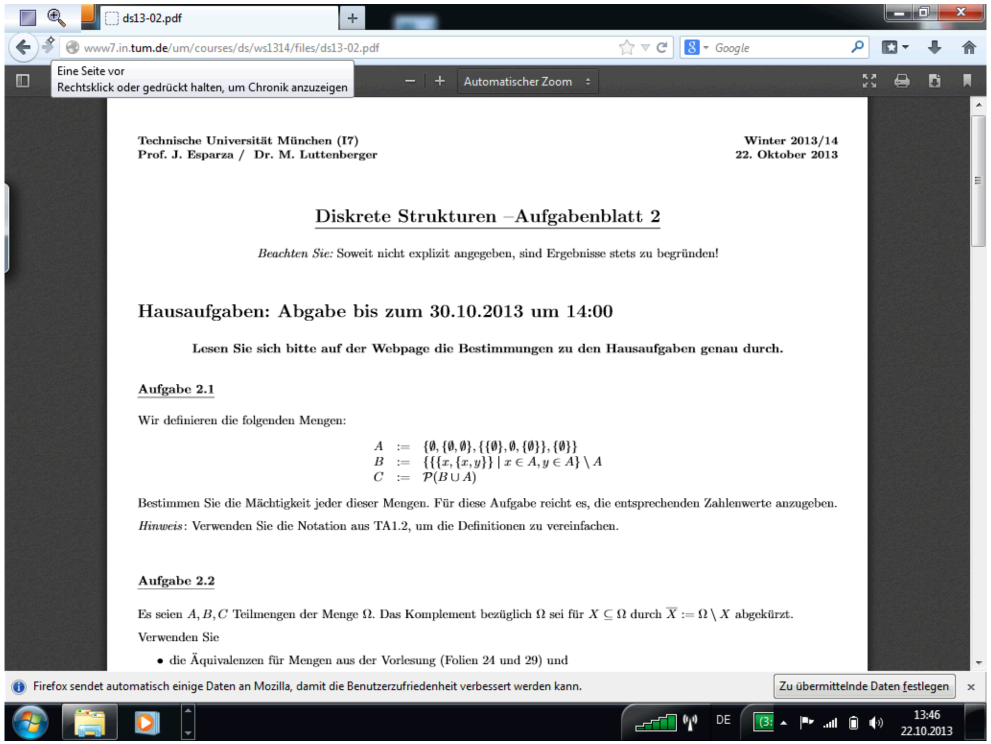
- "rot"

  Grob: zu viele Fehler; zu große Ungenauigkeiten/Lücken; kein zielführender Ansatz

- "gelb"

  Grob: richtiger Lösungsansatz, aber ungenau oder einige (behebare) Fehler

- "grün"



Technische Universität München (I7) Winter 2013/14
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger 22. Oktober 2013

Diskrete Strukturen – Aufgabenblatt 2

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abgabe bis zum 30.10.2013 um 14:00

Lesen Sie sich bitte auf der Webpage die Bestimmungen zu den Hausaufgaben genau durch.

Aufgabe 2.1

Wir definieren die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &:= \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \\ B &:= \{\{\{x, \{x, y\}\} \mid x \in A, y \in A\} \setminus A \\ C &:= \mathcal{P}(B \cup A) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Mächtigkeit jeder dieser Mengen. Für diese Aufgabe reicht es, die entsprechenden Zahlenwerte anzugeben.

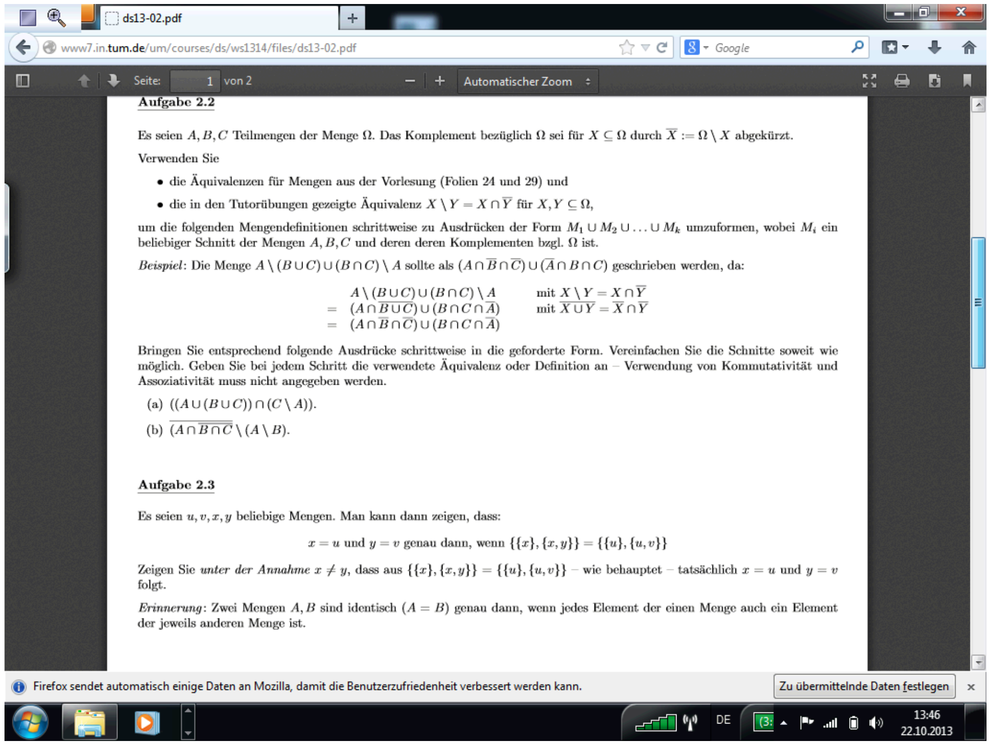
Hinweis: Verwenden Sie die Notation aus TA1.2, um die Definitionen zu vereinfachen.

Aufgabe 2.2

Es seien A, B, C Teilmengen der Menge Ω. Das Komplement bezüglich Ω sei für $X \subseteq \Omega$ durch $\overline{X} := \Omega \setminus X$ abgekürzt.

Verwenden Sie

- die Äquivalenzen für Mengen aus der Vorlesung (Folien 24 und 29) und



Aufgabe 2.2

Es seien A, B, C Teilmengen der Menge Ω. Das Komplement bezüglich Ω sei für $X \subseteq \Omega$ durch $\overline{X} := \Omega \setminus X$ abgekürzt.

Verwenden Sie

- die Äquivalenzen für Mengen aus der Vorlesung (Folien 24 und 29) und
- die in den Tutorübungen gezeigte Äquivalenz $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ für $X, Y \subseteq \Omega$,

um die folgenden Mengendefinitionen schrittweise zu Ausdrücken der Form $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ umzuformen, wobei M_i ein beliebiger Schnitt der Mengen A, B, C und deren deren Komplementen bzgl. Ω ist.

Beispiel: Die Menge $A \setminus (B \cup C) \cup (B \cap C) \setminus A$ sollte als $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$ geschrieben werden, da:

$$\begin{aligned} & A \setminus (B \cup C) \cup (B \cap C) \setminus A && \text{mit } X \setminus Y = X \cap \overline{Y} \\ = \; & (A \cap \overline{B \cup C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) && \text{mit } \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y} \\ = \; & (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C \cap \overline{A}) \end{aligned}$$

Bringen Sie entsprechend folgende Ausdrücke schrittweise in die geforderte Form. Vereinfachen Sie die Schnitte soweit wie möglich. Geben Sie bei jedem Schritt die verwendete Äquivalenz oder Definition an – Verwendung von Kommutativität und Assoziativität muss nicht angegeben werden.

(a) $((A \cup (B \cup C)) \cap (C \setminus A))$.

(b) $\overline{(A \cap \overline{B \cap C}} \setminus (A \setminus B)$.

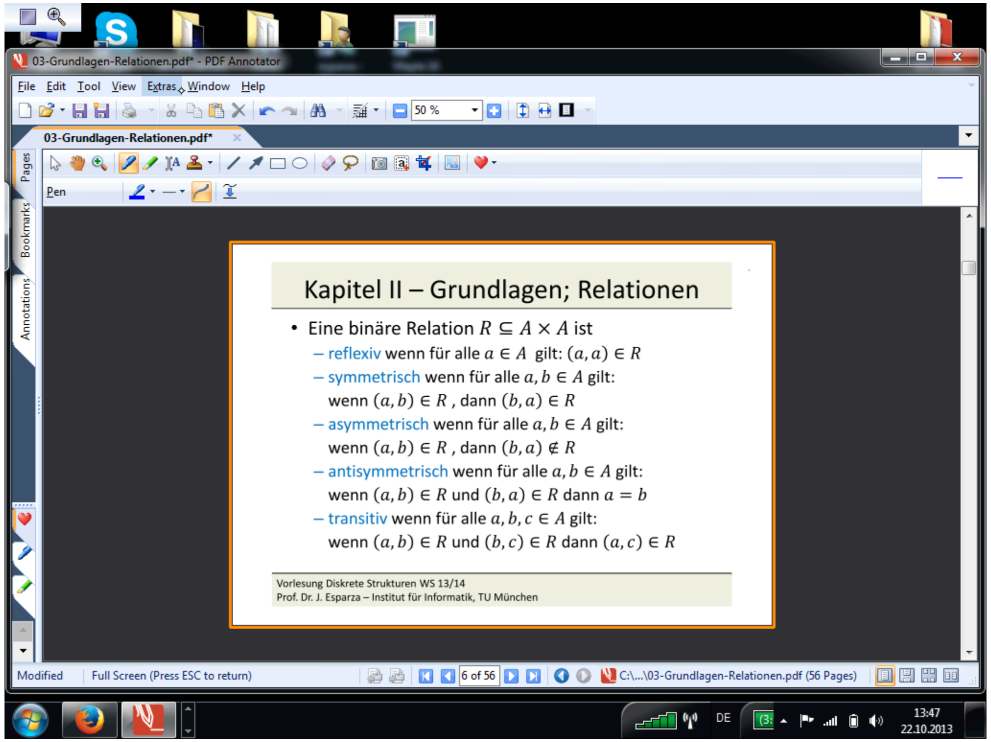
Aufgabe 2.3

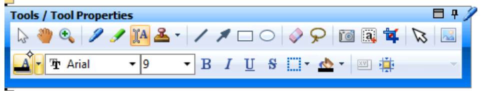
Es seien u, v, x, y beliebige Mengen. Man kann dann zeigen, dass:

$$x = u \text{ und } y = v \text{ genau dann, wenn } \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

Zeigen Sie *unter der Annahme* $x \neq y$, dass aus $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ – wie behauptet – tatsächlich $x = u$ und $y = v$ folgt.

Erinnerung: Zwei Mengen A, B sind identisch ($A = B$) genau dann, wenn jedes Element der einen Menge auch ein Element der jeweils anderen Menge ist.





Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ ist
  - reflexiv wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a,a) \in R$
  - symmetrisch wenn für alle $a,b \in A$ gilt:
    wenn $(a,b) \in R$, dann $(b,a) \in R$
  - asymmetrisch wenn für alle $a,b \in A$ gilt:
    wenn $(a,b) \in R$, dann $(b,a) \notin R$
  - antisymmetrisch wenn für alle $a,b \in A$ gilt:
    wenn $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$ dann $a = b$
  - transitiv wenn für alle $a,b,c \in A$ gilt:
    wenn $(a,b) \in R$ und $(b,c) \in R$ dann $(a,c) \in R$

(1, 5, 2, 8) (3)

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Äquivalenzrelationen
  - Ein Relation $R \subseteq M \times M$, die reflexiv, transitiv, und symmetrisch ist, wird Äquivalenzrelation genannt.
    - Definiert die Ähnlichkeit gewisser Eigenschaften
  - Die Teilmenge $[a] = \{b \in M \mid (a, b) \in R\}$ der Menge M wird Äquivalenzklasse von a der Äquivalenzrelation genannt: Menge der Objekte, die äquivalent zu a sind.
  - Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von M:
    - Entweder $[a] \cap [b] = \emptyset$ oder $[a] = [b]$
    - Für alle $a \in M$ gibt es $b \in M$ mit $a \in [b]$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Ordnungen
  - Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt partielle Ordnung .
  - Andere Namen für eine partielle Ordnung: Halbordnung, partially ordered set, poset.
  - Eine partielle Ordnung heißt totale Ordnung, falls alle Elemente miteinander vergleichbar sind, d.h für zwei Elemente a, b der Grundmenge ist $a\ R\ b$ oder $b\ R\ a$ erfüllt.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Ordnungen
  - Beispiele:

    Die Relation „$\leq$“ über den natürlichen Zahlen ist eine totale Ordnung.

    M sei eine beliebige Menge und 2^M ihre Potenzmenge. Dann ist die Relation „$\subseteq$“ auf 2^M eine partielle Ordnung.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Ordnungen
  - Beispiele:
    - Sei $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b \text{ teilt } a\}$.
      Die Relation R ist eine partielle Ordnung.
    - M sei eine Menge von Schülern, die eine Reihe von Aufgaben zu lösen haben. Für zwei Schüler x, y sei $x \lhd y$ definiert durch *„y hat alle Aufgaben, die x gelöst hat, auch gelöst“*.
      Diese Relation ist noch keine partielle Ordnung (man nennt sie eine Quasiordnung – sie ist reflexiv und transitiv).

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = 2^A$ $\qquad B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1,2,3\}\}$

$R \subseteq B \times B$

$\subseteq$ $\qquad \cdot\, \emptyset$

$\{1\} \; R \; \{1,2\}$ $\qquad \{1\}.$

$\{1\} \; R \; \{1,2,3\}$ $\qquad \{2\}.$

$\{2\} \; \not R \; \{1\}$

- Urbild und Bild einer Relation

Definition:

Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$\{a \in A \mid \text{es gibt } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R\}$$

das Urbild von R und

$$\{b \in A \mid \text{es gibt } a \in B \text{ mit } (a,b) \in R\}$$

das Bild der Relation R.

- Relationenprodukt

Definition:

Seien $R \subseteq A \times B$ und $T \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ T := \{ (a,c) \in A \times C \mid \text{es gibt } b \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in T\}$$

das Produkt oder Join der Relationen R und T.

Es wird oft auch als RT bezeichnet.

- Relatione

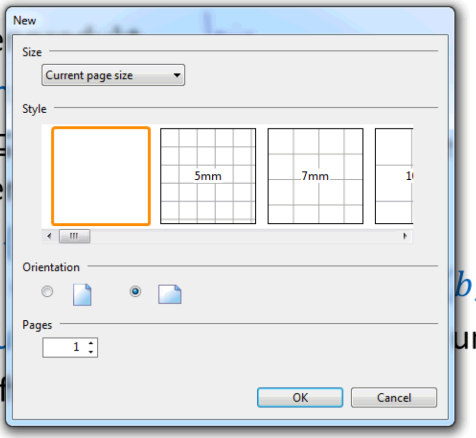
Definition

Seien $R \subseteq$

Relatione

$R \circ T :=$

$b,c) \in T\}$

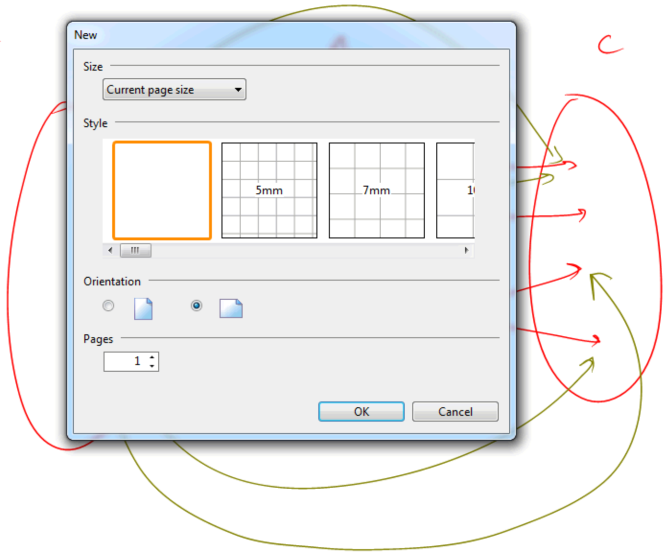


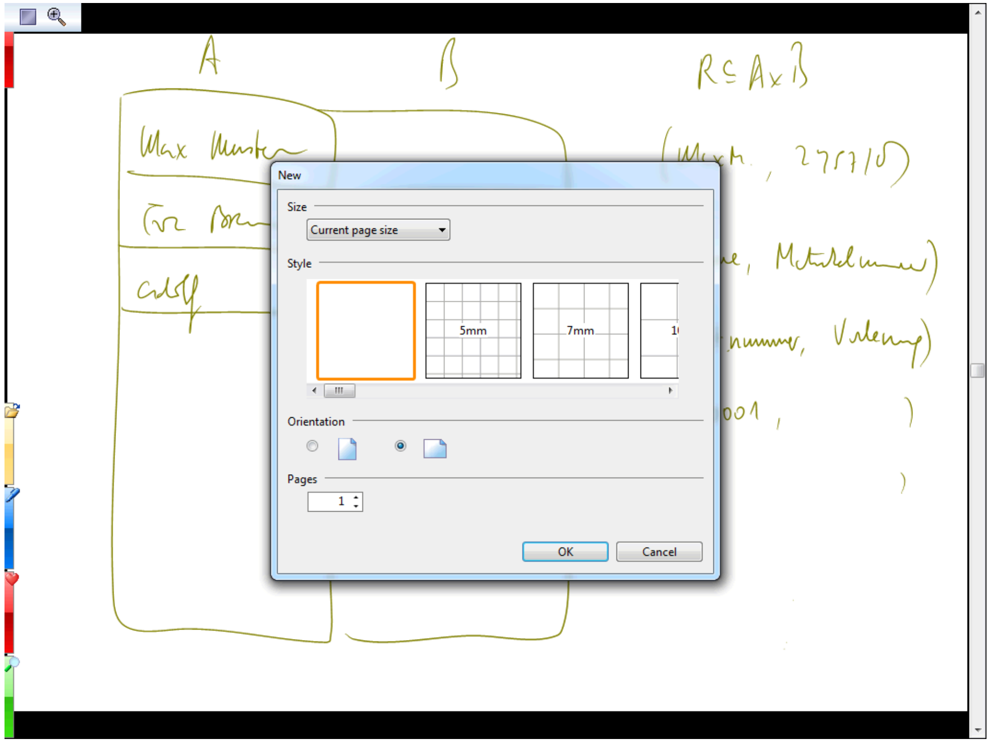
das Produ ... und T.

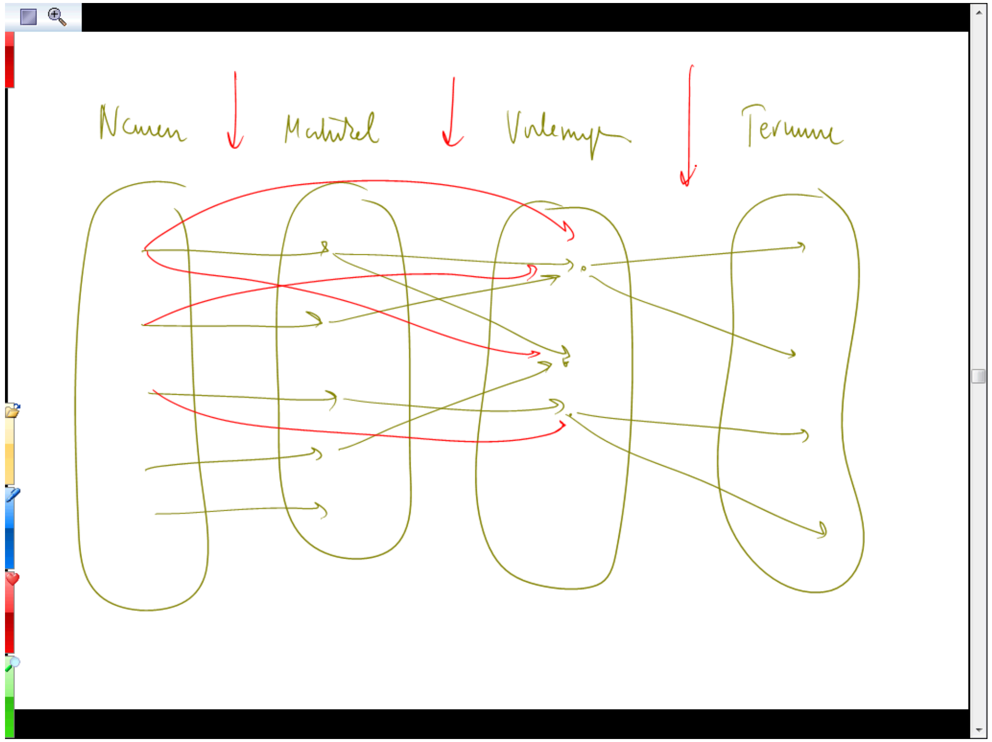
Es wird of

$R \subseteq A \times B$ $\qquad$ $T \subseteq B \times C$

$R \circ T \subseteq A \times C$







Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Relationenprodukt
  Das Relationenprodukt ist assoziativ und distributiv über ∩ und ∪.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposition von Relationen

  Definition:

  Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann heißt

  $R^0 := \{(a,a) | a \in A\}$ (=: Id_A „Identität")

  $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

- Beispiel:
  Sei *Kind* die Relation $\{(k,v) |\ k \text{ ist Kind von } v\}$
  Dann bezeichnet $Kind^2$ die Enkel-Relation.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposi

New

Size

Current page size

Style

5mm 7mm

Orientation

Pages

1

OK Cancel

Definitio

Sei $R \subseteq$ ... nn heißt

$R^0 :=$ ... tität“)

R^{n+1}

- Beispiel:

Sei *Kind* ... von $v\}$

Dann be ... ion.

$R \subseteq A \times A$

$R \circ R$

$R \subseteq A \times B$

$T \subseteq B \times C$

27

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposition von Relationen

Definition:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann heißt

$R^0 := \{(a,a) | a \in A\}$ (=: Id_A „Identität“)

$R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

- Beispiel:

Sei *Kind* die Relation $\{(k,v) |\ k \text{ ist Kind von } v\}$

Dann bezeichnet $Kind^2$ die Enkel-Relation.

$R \subseteq A \times A$

$R \circ R$

$R \subseteq A \times B$

$T \subseteq B \times C$

27

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposi

New

Size

Current page size

Style

5mm 7mm

Orientation

Pages

1

OK Cancel

Definitio

Sei $R \subseteq$ ... nn heißt

$R^0 :=$ ... tität“)

R^{n+1}

- Beispiel:

Sei *Kind* ... von $v\}$

Dann be ... ion.

R^0

$R^1 = R$

$R^2 = R \circ R$

$R^3 = R \circ R \circ R$

R^4

$R^0 \cdot R = R^1$

$R \subseteq A \times A$

$R \circ R$

$R \subseteq A \times B$

$T \subseteq B \times C$

27

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposition von Relationen

Definition:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann heißt

$R^0 := \{(a,a) | a \in A\}$ (=: Id_A „Identität“)

$R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

- Beispiel:

Sei *Kind* die Relation $\{(k,v) |\ k \text{ ist Kind von } v\}$

Dann bezeichnet $Kind^2$ die Enkel-Relation.

R^0

$R^1 = R$

$R^2 = R \circ R$

$R^3 = R \circ R \circ R$

R^4

$R^0 \cdot R = R^1$

$R \subseteq A \times A$

$R \circ R$

$R \subseteq A \times B$

$T \subseteq B \times C$

27

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposition von Relationen

Definition:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann heißt

$R^0 := \{(a,a) \mid a \in A\}$ (=: Id_A „Identität")

$R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

- Beispiel:

Sei *Kind* die Relation $\{(k,v) \mid k$ ist Kind von $v\}$

Dann bezeichnet $Kind^2$ die Enkel-Relation.

R^0

$R^1 = R$

$R^2 = R \circ R$

$R^3 = R \circ R \circ R$

R^4

$R^0 \cdot R = R^1$

$R \subseteq A \times A$

$R \circ R$

$R \subseteq A \times B$

$T \subseteq B \times C$

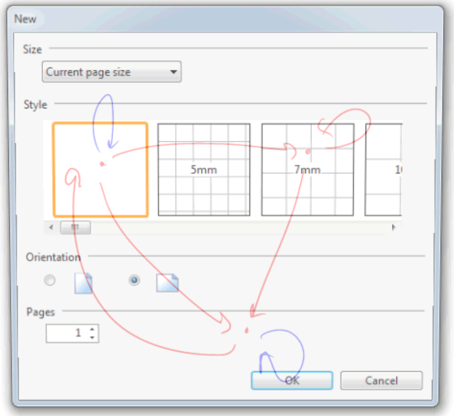
Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Abschluss von Relationen
- Definition:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

Der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) von R ist die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.

Reflexiver Abschluss



Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Abschluss von Relationen

  Die transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^+ bezeichnet.

  Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Transitive Hülle von $R \subseteq A \times A$

  Es gilt: $R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$
- Transitive und reflexive Hülle von $R \subseteq A \times A$

  Es gilt: $R^* = R^+ \cup Id_A = \bigcup_{i=0}^{n} R_i$

  Wir werden diese Aussagen später in der Vorlesung sorgfältig beweisen.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Transitive Hülle

  Beispiele:

  – Sei $R = \{(x,y) \mid y = x+1 \text{ und } x, y \in \mathbb{N}\}$ die Nachfolgerelation auf den natürlichen Zahlen. Dann gilt $R^+ = <$ und $R^* = \leq$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Definition:
  - Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist eine Funktion von A nach B wenn es für alle $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ mit $a\ R\ b$ gibt.
  - $f\colon A \rightarrow B$ bezeichnet, dass f eine Funktion von A nach B ist.
  - Für jedes $a \in A$ bezeichnet $f(a)$ das einzige Element von B mit $(a, f(a)) \in f$.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Definition:
  Eine *n*-stellige Operation über der Menge *A* ist eine Funktion von der Menge der geordneten n-Tupel von Elementen von A auf A.
  - Mengenvereinigung und Durchschnitt (∪ und ∩) sind binäre Operationen auf der Potenzmenge einer Menge.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Definition:
  Eine *n*-stellige Operation über der Menge *A* ist eine Funktion von der Menge der geordneten n-Tupel von Elementen von A auf A.
  - Mengenvereinigung und Durchschnitt (∪ und ∩) sind binäre Operationen auf der Potenzmenge einer Menge.

A A

$f(1,2) \neq f(2,1)$ $f: \underbrace{A \times \dots \times A}_{n} \to A$ $f: A \to A$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Konstruktion von Funktionsoperationen
  - Eine beliebige Operation • (“dot”) über B kann auf Funktionen $f : A \to B$ erweitert werden.
  - Sei $\bullet: B \times B \to B$ eine beliebige binäre Operation.
    Seien $f, g\colon A \to B$ Funktionen. Wir definieren

$$(f \bullet g)\colon A \to B$$
$$a \mapsto f(a) \bullet g(a)$$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Konstruktion von Funktionsoperationen
  - Beispiel:
    Die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ über $\mathbb{R}$ werden auf Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erweitert:

$$(f+g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Komposition von Funktionen:

  Die Operation („∘") setzt aus zwei Funktionen $g\colon A \to B$ und $f\colon B \to C$ eine neue Funktion zusammen, indem f auf das Resultat von g angewendet wird.
  - Wir schreiben: $(f \circ g)\colon A \to C$ definiert durch $(f \circ g)(a) = (f(g(a)))$.
  - Da $g(a) \in B$, ist $f(g(a))$ definiert und Element von C.
  - Der Operator $\circ$ ist nicht kommutativ; im Allgemeinen gilt: $f \circ g \neq g \circ f$.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Bilder und Urbilder von Funktionen
  - f(a) wird als Bild von a unter f bezeichnet.
  - Sei $f\colon A \to B$ und $A' \subseteq A$. Dann ist das Bild von A' unter f die Menge aller Bilder (unter f) der Elemente von A':

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Bilder und Urbilder von Funktionen
  - Das Urbild $f^{-1}(b)$ eines Elements $b \in B$ ist definiert als

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

  - Für eine Menge $B' \subseteq B$ gilt:

$$f^{-1}(B') = \{f^{-1}(b) \mid b \in B'\}$$

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

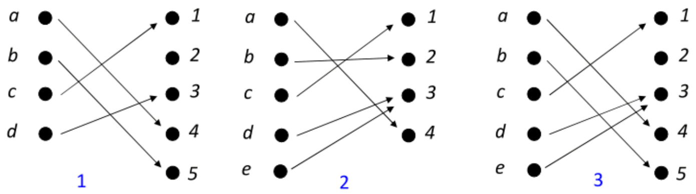
- Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt
  - injektiv, wenn alle Elemente aus A unterschiedliche Bilder haben, wenn also für alle $b \in B$ gilt:

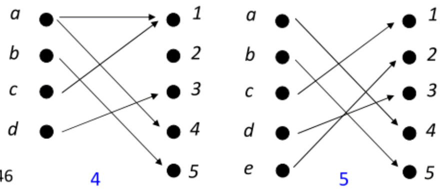
    $|f^{-1}(b)| \leq 1$.
  - surjektiv, wenn jedes Element aus B ein Bild von mindestens einem Element aus A ist, wenn also für alle $b \in B$ gilt:

    $|f^{-1}(b)| \geq 1$.

Kapitel II – Grundlagen; Relationen

- Grafische Darst. der Injektivität/Surjektivität.





1: injektiv, ¬surjektiv
2: surjektiv, ¬injektiv
3. ¬injektiv, ¬surjektiv
4. Keine Funktion
5. injektiv, surjektiv