Script generated by TTT

Title: Mayr: 2012 ds (05.02.2013)

Date: Tue Feb 05 13:51:14 CET 2013

Duration: 87:26 min

Pages: 41

Problemstellungen:

1. Gegeben $u, v \in V$, berechne $\mathrm{d}(u, v)$.
2. Gegeben $u \in V$, berechne für alle $v \in V$ die Länge $\mathrm{d}(u, v)$ eines kürzesten Pfades von u nach v (sssd, single source shortest distance).
3. Berechne für alle $(u, v) \in V^2$ die kürzeste Entfernung $\mathrm{d}(u, v)$ (apsd, all pairs shortest distance).
4. Die Probleme sssp, single source shortest path und apsp, all pairs shortest path sind entsprechend, nur wird jeweils ein kürzester Pfad (und nicht nur dessen Länge) berechnet.

Problemstellungen:

1. Gegeben $u, v \in V$, berechne $\mathrm{d}(u, v)$.
2. Gegeben $u \in V$, berechne für alle $v \in V$ die Länge $\mathrm{d}(u, v)$ eines kürzesten Pfades von u nach v (sssd, single source shortest distance).
3. Berechne für alle $(u, v) \in V^2$ die kürzeste Entfernung $\mathrm{d}(u, v)$ (apsd, all pairs shortest distance).
4. Die Probleme sssp, single source shortest path und apsp, all pairs shortest path sind entsprechend, nur wird jeweils ein kürzester Pfad (und nicht nur dessen Länge) berechnet.

Deskewing Image...

Problemstellungen:

1. Gegeben $u, v \in V$, berechne $\mathrm{d}(u, v)$.
2. Gegeben $u \in V$, berechne für alle $v \in V$ die Länge $\mathrm{d}(u, v)$ eines kürzesten Pfades von u nach v (sssd, single source shortest distance).
3. Berechne für alle $(u, v) \in V^2$ die kürzeste Entfernung $\mathrm{d}(u, v)$ (apsd, all pairs shortest distance).
4. Die Probleme sssp, single source shortest path und apsp, all pairs shortest path sind entsprechend, nur wird jeweils ein kürzester Pfad (und nicht nur dessen Länge) berechnet.

6.1 Der Floyd-Warshall-Algorithmus für apsd

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Sei o. B. d. A. $V = \{0, \ldots, n-1\}$. Eine Gewichtsmatrix ist wie folgt definiert:

$$D = \big(w(v_i, v_j)\big)_{\substack{0 \le i < n \\ 0 \le j < n}}$$

Ziel ist es, eine $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$d_{ij} = \text{ Länge eines kürzesten Weges von } i \text{ nach } j$$

zu berechnen. Dazu werden induktiv Matrizen $D^{(k)}$ mit Einträgen

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{pmatrix} \text{Länge eines kürzesten Weges von } i \text{ nach } j, \\ \text{so dass alle inneren Knoten} < k \text{ sind} \end{pmatrix}$$

erzeugt.


```
algorithm Floyd
  for i=0 to n-1 do
    for j=0 to n-1 do
      D^0[i,j] := w(v_i,v_j)
    od
  od
  for k=0 to n-1 do
    for i=0 to n-1 do
      for j=0 to n-1 do
        D^{k+1}[i,j] := min{D^k[i,j],
                           D^k[i,k]+D^k[k,j]}
      od
    od
  od
end
```


Satz 315

Der Floyd-Algorithmus berechnet für alle $u, v \in V^2$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen u und v, und zwar mit Zeitbedarf $\Theta(n^3)$ und Platzbedarf $\Theta(n^2)$.

Beweis:
Ersichtlich aus Algorithmus. □


```
algorithm Floyd
  for i=0 to n-1 do
    for j=0 to n-1 do
      D^0[i,j] := w(v_i,v_j)
    od
  od
  for k=0 to n-1 do
    for i=0 to n-1 do
      for j=0 to n-1 do
        D^{k+1}[i,j] := min{D^k[i,j],
                           D^k[i,k]+D^k[k,j]}
      od
    od
  od
end
```

```
algorithm Floyd
  for i=0 to n-1 do
    for j=0 to n-1 do
      D^0[i,j] := w(v_i,v_j)
    od
  od
  for k=0 to n-1 do
    for i=0 to n-1 do
      for j=0 to n-1 do
        D^{k+1}[i,j] := min{D^k[i,j],
                            D^k[i,k]+D^k[k,j]}
      od
    od
  od
end
```


Satz 315

Der Floyd-Algorithmus berechnet für alle $u, v \in V^2$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen u und v, und zwar mit Zeitbedarf $\Theta(n^3)$ und Platzbedarf $\Theta(n^2)$.

Beweis:
Ersichtlich aus Algorithmus. □

Bemerkungen:

1. Zur Bestimmung der eigentlichen Pfade (und nicht nur der Entfernungen) muss bei der Minimum-Bestimmung jeweils das k gespeichert werden.
2. Der Algorithmus funktioniert auch, wenn *negative Kantengewichte* vorhanden sind, es jedoch keine *negativen Kreise* gibt.
3. Die Erweiterung auf Digraphen ist offensichtlich.

Satz 315

Der Floyd-Algorithmus berechnet für alle $u, v \in V^2$ die Länge eines kürzesten Weges zwischen u und v, und zwar mit Zeitbedarf $\Theta(n^3)$ und Platzbedarf $\Theta(n^2)$.

Beweis:
Ersichtlich aus Algorithmus. □

6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $s \in V$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

```
algorithm Dijkstra
  F:=V\{s}
  for all v ∈ F do d[v] := w(s,v) od
  co d[s]=0 oc
  while F≠∅ do
    bestimme v ∈ F mit d[v] minimal
    F:=F\{v}
    for all w ∈ N(v) do
      d[w] := min{d[w], d[v]+w(v,w)}
    od
  od
end
```


6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $s \in V$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

```
algorithm Dijkstra
  F:=V\{s}
  for all v ∈ F do d[v] := w(s,v) od
  co d[s]=0 oc
  while F≠∅ do
    bestimme v ∈ F mit d[v] minimal
    F:=F\{v}
    for all w ∈ N(v) do
      d[w] := min{d[w], d[v]+w(v,w)}
    od
  od
end
```

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd

Satz 316

Dijkstras Algorithmus berechnet $\mathrm{d}(s, v)$ für alle $v \in V$; der Zeitaufwand ist $O(n^2)$, der Platzbedarf $O(n + m)$.

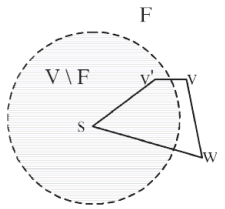
Beweis:

Zeit- und Platzbedarf sind aus dem Algorithmus ersichtlich. Die Korrektheit zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis:

Annahme: v sei der erste Knoten, so dass $\mathrm{d}(s, v)$ falsch (d. h. zu groß) berechnet wird.

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



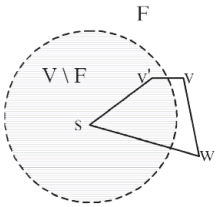
Nach Annahme muss dann gelten:

$$\mathrm{d}(w) + w(w, v) < \mathrm{d}(s, v') + w(v', v) = \mathrm{d}(v) \ .$$

Damit wäre $\mathrm{d}(w)$ aber kleiner als $\mathrm{d}(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



Nach Annahme muss dann gelten:

$$\mathrm{d}(w) + w(w,v) < \mathrm{d}(s,v') + w(v',v) = \mathrm{d}(v) \ .$$

Damit wäre $\mathrm{d}(w)$ aber kleiner als $\mathrm{d}(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

Bemerkung:

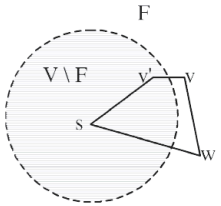
Mit besseren Datenstrukturen (priority queues – z. B. Fibonacci heaps) kann Dijkstras Algorithmus so implementiert werden, dass er z. B. in Zeit $O(m + n \cdot \log n)$ läuft.

Bemerkung:

Mit besseren Datenstrukturen (priority queues – z. B. Fibonacci heaps) kann Dijkstras Algorithmus so implementiert werden, dass er z. B. in Zeit $O(m + n \cdot \log n)$ läuft.

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



Nach Annahme muss dann gelten:

$$\mathrm{d}(w) + w(w,v) < \mathrm{d}(s,v') + w(v',v) = \mathrm{d}(v) \ .$$

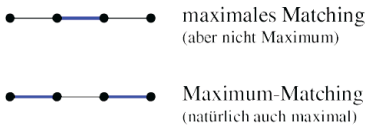
Damit wäre $\mathrm{d}(w)$ aber kleiner als $\mathrm{d}(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

7. Matchings

Definition 317
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

1. $M \subseteq E$ heißt Matching, falls alle Kanten in M paarweise disjunkt sind.
2. M heißt maximales Matching, falls es kein Matching M' in G gibt mit $M \subsetneq M'$.
3. M heißt Matching maximaler Kardinalität (aka Maximum Matching), falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt.
4. $\mathrm{m}(G)$ ist die Kardinalität eines Maximum Matchings in G.

Beispiel 318



7.1 Matchings in bipartiten Graphen

Satz 319 („Heiratssatz“)
Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist $\mathrm{m}(G) = |U|$ genau dann, wenn gilt:

$$(\forall A \subseteq U)\big[|A| \leq |N(A)|\big]$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Offensichtlich.

7.1 Matchings in bipartiten Graphen

Satz 319 („Heiratssatz“)
Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist $\mathrm{m}(G) = |U|$ genau dann, wenn gilt:

$$(\forall A \subseteq U)\big[|A| \leq |N(A)|\big]$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Offensichtlich.

„⇐“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

„⇐“

Sei M ein Maximum Matching in G.
Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M *ungematcht*.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

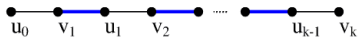
Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v. Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

Beweis (Forts.):

„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:

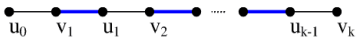


Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.
Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:

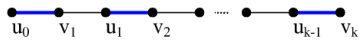
Beweis (Forts.):

„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:



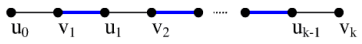
Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.
Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



Beweis (Forts.):

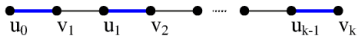
„⇐“(Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:



Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt alternierender Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch augmentierend.

Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



Definition 320

Man definiert für einen bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ die Kenngröße:

$$\delta := \delta(G) := \max_{A \subseteq U} \{|A| - |N(A)|\}$$

Da bei der Maximumsbildung auch $A = \emptyset$ sein kann, ist $\delta \geq 0$.

Satz 321

Es gilt:

$$\mathrm{m}(G) = |U| - \delta \ .$$

Definition 320

Man definiert für einen bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ die Kenngröße:

$$\delta := \delta(G) := \max_{A \subseteq U} \{|A| - |N(A)|\}$$

Da bei der Maximumsbildung auch $A = \emptyset$ sein kann, ist $\delta \geq 0$.

Satz 321

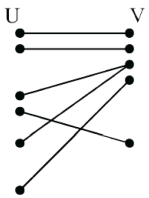
Es gilt:

$$\mathrm{m}(G) = |U| - \delta \ .$$

Beweis:

Dass $\mathrm{m}(G) \leq |U| - \delta$ gilt, ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch, dass auch $\mathrm{m}(G) \geq |U| - \delta$ gilt, damit ist der Satz bewiesen.

Betrachte folgenden Graphen:



Man fügt nun δ neue Knoten hinzu. Von diesen gehen Kanten zu allen Knoten in U, so dass ein $K_{|U|,\delta}$ entsteht.

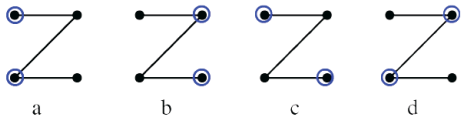
Beweis (Forts.):

Der neue Graph erfüllt die Voraussetzungen des Heiratssatzes. Damit gibt es im neuen Graphen ein Matching M' mit $|M'| = |U|$. Daraus folgt, dass es im alten Graphen ein Matching der Kardinalität $\geq |U| - \delta$ geben muss. □

Definition 322

$D \subseteq U \uplus V$ heißt Träger oder Knotenüberdeckung (*vertex cover, VC*) von G, wenn jede Kante in G zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

Beispiel 323



In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

Definition 322

$D \subseteq U \uplus V$ heißt Träger oder Knotenüberdeckung (*vertex cover, VC*) von G, wenn jede Kante in G zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

Beispiel 323

In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

Satz 324

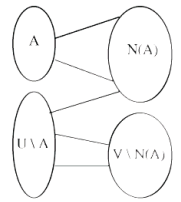
Es gilt:

$$\max\{|M|; M \text{ Matching}\} = \min\{|D|; D \text{ Träger}\}$$

Beweis:

„$\leq$“ Offensichtlich.

„$\geq$“ Für ein geeignetes $A \subseteq U$ gilt $\mathrm{m}(G) = |U| - \delta(G) = |U \setminus A| + |N(A)|$:



$(U \setminus A) \cup N(A)$ ist Träger von G.

□

Beweis:

„$\leq$“ Offensichtlich.

„$\geq$“ Für ein geeignetes $A \subseteq U$ gilt $\mathrm{m}(G) = |U| - \delta(G) = |U \setminus A| + |N(A)|$:

$(U \setminus A) \cup N(A)$ ist Träger von G.

□

Sei

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

eine (quadratische) Matrix mit $m_{ij} \geq 0$. Alle Zeilen- und Spaltensummen von M seien gleich $r > 0$.

Man ordnet nun M den bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ zu mit

$$U = \{u_1, \ldots, u_n\}, V = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ und } \{u_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow m_{ij} > 0.$$

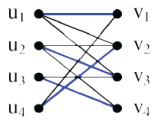
Ein Matching in G entspricht einer Menge von Positionen in M, die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen.

Beispiel 325

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Graphen



Bemerkung:
Ein Träger D von G ist also eine Menge von Zeilen und Spalten von M, die zusammen alle Einträge $m_{ij} > 0$ enthalten.

Definition 326
Eine Menge von Positionen (in M), die alle in verschiedenen Zeilen und in verschiedenen Spalten liegen und Einträge > 0 enthalten, heißt Diagonale von M.

Eine Diagonale der Größe n muss in M existieren, denn falls M keine solche Diagonale hat, gibt es nach Satz 324 e Zeilen und f Spalten mit $e + f < n$, die zusammen alle Einträge > 0 von M enthalten.
Die Gesamtsumme der Einträge in M wäre dann

$$n \cdot r = \sum_{i,j} m_{ij} \leq (e + f) \cdot r < r \cdot n,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Bemerkung:
Ein Träger D von G ist also eine Menge von Zeilen und Spalten von M, die zusammen alle Einträge $m_{ij} > 0$ enthalten.

Definition 326
Eine Menge von Positionen (in M), die alle in verschiedenen Zeilen und in verschiedenen Spalten liegen und Einträge > 0 enthalten, heißt Diagonale von M.

Eine Diagonale der Größe n muss in M existieren, denn falls M keine solche Diagonale hat, gibt es nach Satz 324 e Zeilen und f Spalten mit $e + f < n$, die zusammen alle Einträge > 0 von M enthalten.
Die Gesamtsumme der Einträge in M wäre dann

$$n \cdot r = \sum_{i,j} m_{ij} \leq (e + f) \cdot r < r \cdot n,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.