Script generated by TTT

Title: Mayr: 2012 ds (08.01.2013)

Date: Tue Jan 08 13:45:04 CET 2013

Duration: 89:21 min

Pages: 63

WS 2012/13

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/

Wintersemester 2012

Kapitel 0 Organisatorisches

WS 2012/13

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/

Wintersemester 2012

4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

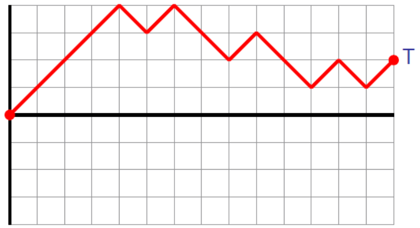
4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten" Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten" Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:



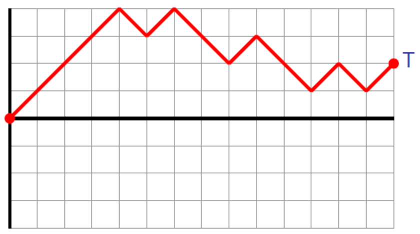
4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten“ Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten“ Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:



4.7.7 Das Ballot-Problem

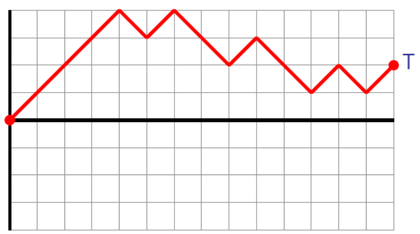
Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 323/356

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten“ Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten“ Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:



Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr 324/356

4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

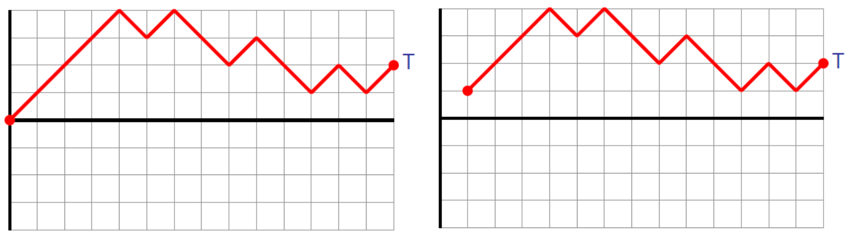
4.7.7 Das Ballot-Problem

Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

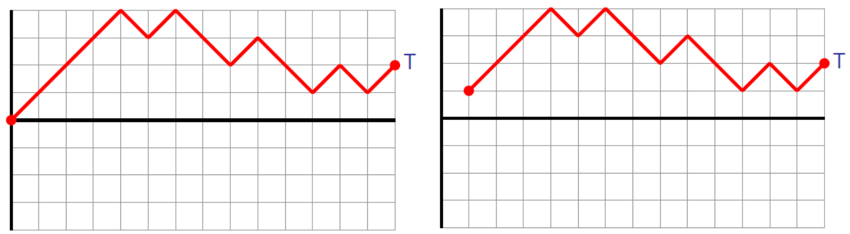
Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten“ Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten“ Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:



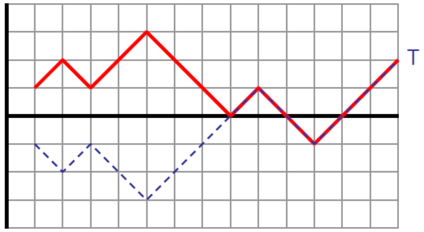
Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten“ Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten“ Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:

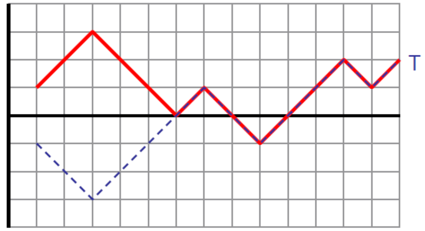


Damit ergibt sich

Anzahl der „guten“ Pfade von $(0,0)$ zu $T =$

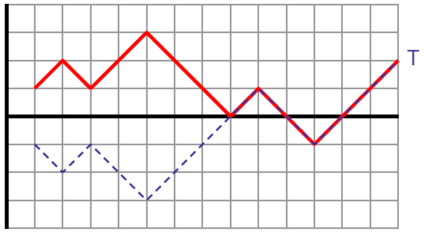
Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten“ Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:

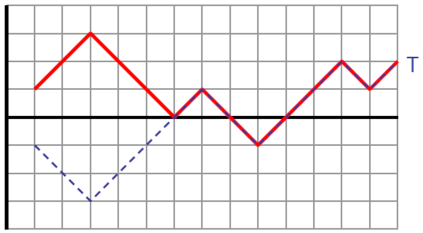




erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten“ Pfade von $(1,1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ zu T ist.

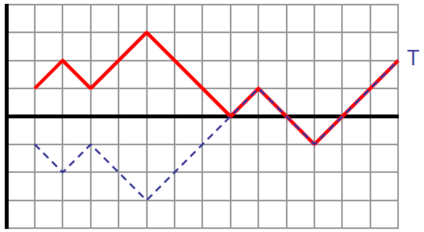
Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten“ Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:

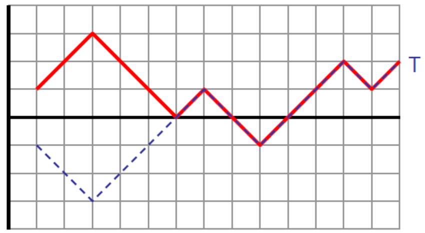




erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten“ Pfade von $(1,1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ zu T ist.

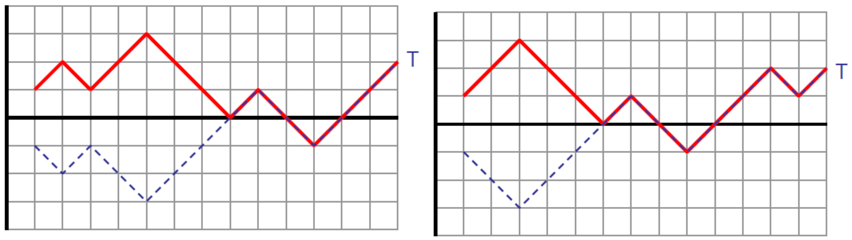
Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten“ Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:





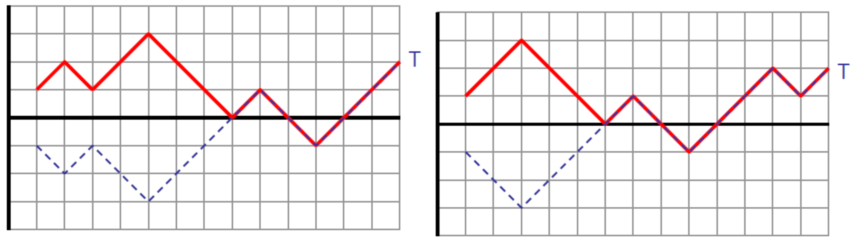
erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten“ Pfade von $(1,1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ zu T ist.

Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten" Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:



erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten" Pfade von $(1, 1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1, -1)$ zu T ist.

Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten" Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:



erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten" Pfade von $(1, 1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1, -1)$ zu T ist.

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr
4.7 Abzählkoeffizienten
325/356

Damit ergibt sich

Anzahl der „guten" Pfade von $(0, 0)$ zu $T =$

Damit ergibt sich

Anzahl der „guten" Pfade von $(0, 0)$ zu $T =$

Anzahl der „guten" Pfade von $(1, 1)$ zu $T =$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&= \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&= \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}\,.
\end{aligned}
$$

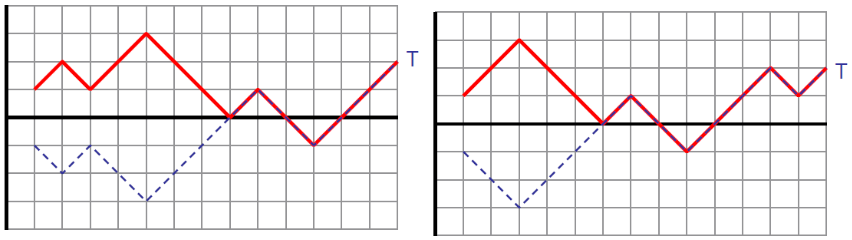
Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a - 1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (0,0) \text{ zu } T = \\
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (1,1) \text{ zu } T = \\
&\qquad = \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&\qquad = \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&\qquad = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}\,.
\end{aligned}
$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

Durch Spiegelung des Anfangssegments eines „schlechten" Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:



erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten" Pfade von $(1,1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ zu T ist.

Damit ergibt sich

Anzahl der „guten" Pfade von $(0,0)$ zu $T =$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (0,0) \text{ zu } T = \\
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (1,1) \text{ zu } T = \\
&\qquad = \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&\qquad = \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&\qquad = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}\,.
\end{aligned}
$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (0,0) \text{ zu } T = \\
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (1,1) \text{ zu } T = \\
&\qquad = \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&\qquad = \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&\qquad = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}.
\end{aligned}$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

4.8 Summation und Differenzenoperator

4.8.1 Direkte Methoden

1. Indextransformation:

Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

Beispiel 195

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \cdots + n \cdot a = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n-k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) \cdot a$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (0,0) \text{ zu } T = \\
&\text{Anzahl der „guten" Pfade von } (1,1) \text{ zu } T = \\
&\qquad = \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&\qquad = \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&\qquad = \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}.
\end{aligned}$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.7 Abzählkoeffizienten 326/356

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren! Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beispiel (Forts.)

1. *Sei*

$$b := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i .$$

Damit:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1}$$

Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren! Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:

1. $P_n \Rightarrow P_{n-1}$
2. $(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{2n}$

Beispiel (Forts.)

1. *Sei*

$$b := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i .$$

Damit:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) \cdot b \overset{P_n}{\leq} \left(\frac{1}{n}\left(b + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\right)^n$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n = \left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^{n-1} \Rightarrow P_{n-1}$$

Beispiel (Forts.)

2. *Es gilt:*

$$\prod_{i=1}^{2n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)$$

$$\overset{P_n}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^n$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)\right)^n$$

$$\overset{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow P_{2n}$$

4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt Translationsoperator.

4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt Translationsoperator.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ heißt (Vorwärts-)Differenzenoperator.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel 199

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \cdots \circ E)}_{a}(f)(x) = f(x+a)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $$(P \pm Q)(f + g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$
2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$
3. $$(QP)(f) = Q(P(f)), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$
4. $$\Delta^n = (E - I)^n = \underbrace{(E - I) \ldots (E - I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right)$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k) \, . \end{aligned}$$

Beweis:

Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k) \, . \end{aligned}$$

Beweis:

Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta^n(f)(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k \right) (f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k) \, . \end{aligned}$$

Beweis:

Klar. □

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

4.8.3 Fallende Fakultät

Definition 202

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$.

Damit für $n = -1$ „formal“:

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Lemma 203

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$
2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis:

(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}}\\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Lemma 203

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$
2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis:
(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}}\\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0 \cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}}\\ &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)}\\ &= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)}\\ &= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}\end{aligned}$$

$\square$

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204
Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204
Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

Satz 205
Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:
Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204

Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

Satz 205

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

Beispiel 206

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}}\,.$$

Dann ist (für $x \in \mathbb{N}$)

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)\cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x ,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)\cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x ,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 209

Was ist $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} .$$

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} .
\end{aligned}$$

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k}\cdot x^{\underline{k}} ,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 277) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.