

Script generated by TTT

Title: Meixner: test2 (20.12.2012)

Date: Thu Dec 20 10:19:09 CET 2012

Duration: 90:31 min

Pages: 37

$s_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \quad \forall n, k > 0$$

Adobe Acrobat Professional window showing the same content as the left page, including the title, date, duration, and the Stirling triangle table. The content is partially obscured by a green arrow icon in the top right corner.

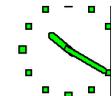


Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right].$$

Beweis:
(Vollständige Induktion)
Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^0 = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$



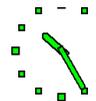


Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right].$$

Beweis:
 (Vollständige Induktion)
 Induktionsanfang: $n = 0$

$$x^0 = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$



Beweis (Forts.):

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$

$$x^{n+1} = (x - n) \cdot x^n$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{!}{=} (x - n) \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot (s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k}) \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k \end{aligned}$$



4.7.3 Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma 186

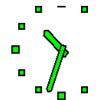
Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

Beweis:
 Sei $N = \{1, \dots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt
 entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \dots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$



4.7.3 Stirling-Zahlen der zweiten Art

Lemma 186

Es gilt:

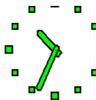
$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

Beweis:
 Sei $N = \{1, \dots, n\}$.

In einer Partition von N in k Teilmengen gilt
 entweder: $\{n\}$ tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \dots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten



$S_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

Beweis (Forts.):

oder: n ist in einem N_i mit ≥ 2 Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \dots \uplus N_k$$

Streiche n . Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \dots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1, \dots, n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$ Möglichkeiten. n kann an einer von k Stellen entfernt worden sein:

\Rightarrow insgesamt $k \cdot S_{n-1,k}$ Möglichkeiten in diesem Fall. \square

Bemerkung:

Es gibt auch andere Notationen für die Stirling-Zahlen zweiter Art, z. B.:

$$S_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

z. B. in Graham, Knuth, Pataschnik: Concrete Mathematics

Einige Eigenschaften:

$$S_{n,1} = 1$$

$$S_{n,2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

$$S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

$$S_{n,n} = 1$$



4.7.4 Auflistung von Permutationen

Definition 187

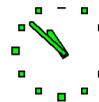
Seien $\pi = (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n)$ und $\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)$ zwei Permutationen aus S_n , $\pi \neq \sigma$, als Wertevektor geschrieben (d.h. $\pi_i = \pi(i)$ etc.). Dann heißt π **lexikographisch kleiner** als σ , geschrieben $\pi < \sigma$, genau dann, wenn

$$(\exists 1 \leq k \leq n)(\forall 1 \leq i < k) [\pi_i = \sigma_i \wedge (\pi_k < \sigma_k)].$$

Beispiel 188

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$



Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

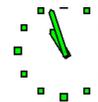
Gegeben: $N = \{1, 2, \dots, n\}$

```

appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix o a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix o k, N\{k})
    od
  fi
end

```

Aufruf: appendlexlist(λ , N)



pdf - Adobe Acrobat Professional

File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

316 (952 of 1008) 163%

Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

Gegeben: $N = \{1, 2, \dots, n\}$

```

appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix o a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix o k, N\{k})
    od
  fi
end

```

Aufruf: appendlexlist(λ , N)

Diskrete Strukturen 4.7 Abzählkoeffizienten 316/333 LEA



Algorithmus zur Auflistung von S_n in lexikographischer Ordnung:

Gegeben: $N = \{1, 2, \dots, n\}$

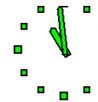
```

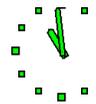
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix o a)
  else
    for k ∈ N in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix o k, N\{k})
    od
  fi
end

```

Aufruf: appendlexlist(λ , N)

Handwritten red annotations: a red arrow points to the lambda parameter, and a red squiggle is below it.





Beispiel 189

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$:

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$



4.7.5 Auflistung von Teilmengen

Sei $N = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $|N| = n$.

Definition 190

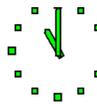
Seien $A, B \subseteq N$, $A \neq B$. Dann heißt A **lexikographisch kleiner als** B , geschrieben $A < B$, wenn

$$\max\{A \Delta B\} \in B$$

Beispiel 191

$N = \{0, 1, 2\}$:

$$2^N = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1, 0\}, \{2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 1, 0\}\}$$



Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:



- $N = \{0, \dots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
- Sei $a = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0} = \{k \in N : 0 \leq k \leq n-1 \wedge a_k = 1\}$$

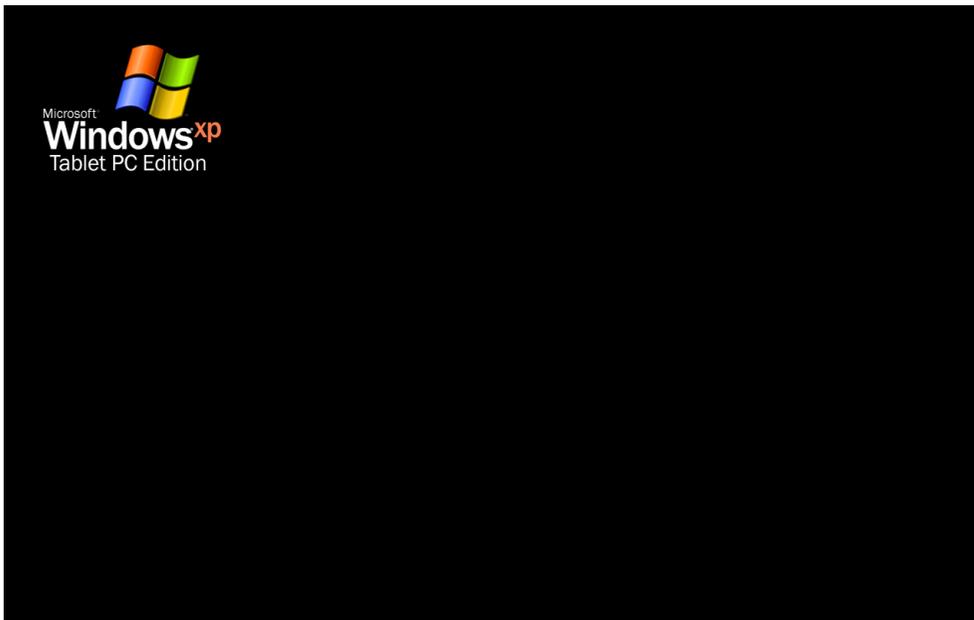


Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

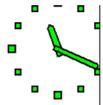


- $N = \{0, \dots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
- Sei $a = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0} = \{k \in N : 0 \leq k \leq n-1 \wedge a_k = 1\}$$



Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:



- $N = \{0, \dots, n-1\}$. Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf n Stellen auf.
- Sei $a = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ ein Element der obigen Folge. Dann entspricht a die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0} = \{k \in N : 0 \leq k \leq n-1 \wedge a_k = 1\}$$



4.7.6 Gray-Codes

Definition 192

Ein Gray-Code $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Permutation (g_0, \dots, g_{2^n-1}) der Wörter in $\{0, 1\}^n$, so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter g_i und g_{i+1} , für alle $i = 0, \dots, 2^n - 1$, in genau einer Position unterscheiden.

$GC(n)$ heißt **zyklischer Gray-Code**, falls die Bedingung auch für g_{2^n-1} und g_0 gilt.

$$GC(1) := (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1)$$

$$GC(n+1) := (0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \dots, 0 \cdot g_{n,2^n-1},$$

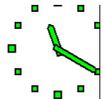
$$1 \cdot g_{n,2^n-1}, \dots, 1 \cdot g_{n,0})$$

Beispiel 193

$$GC(3) = (000 \ 001 \ 011 \ 010 \ 110 \ 111 \ 101 \ 100)$$



Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung, zweite Variante:



Sei $n \in \mathbb{N}$.

```

appendlexlist(set praefix, nat n)
  for k = 0, 1 do
    if k = 1 then praefix := praefix ∪ {n} fi
    if n = 0 then print(praefix)
    else
      appendlexlist(praefix, n - 1)
    fi
  od
end

```

Aufruf: $\text{appendlexlist}(\emptyset, n - 1)$



4.7.6 Gray-Codes

Definition 192

Ein Gray-Code $GC(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Permutation (g_0, \dots, g_{2^n-1}) der Wörter in $\{0, 1\}^n$, so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter g_i und g_{i+1} , für alle $i = 0, \dots, 2^n - 1$, in genau einer Position unterscheiden.

$GC(n)$ heißt zyklischer Gray-Code, falls die Bedingung auch für g_{2^n-1} und g_0 gilt.

$$GC(1) := (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1)$$

$$GC(n+1) := (0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \dots, 0 \cdot g_{n,2^n-1},$$

$$1 \cdot g_{n,2^n-1}, \dots, 1 \cdot g_{n,0})$$

Beispiel 193

$$GC(3) = (000 \ 001 \ 011 \ 010 \ 110 \ 111 \ 101 \ 100)$$

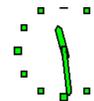


Lemma 194

- $GC(n)$ hat Länge 2^n .
- $\{g_{n,0}, \dots, g_{n,2^n-1}\} = \{0, 1\}^n$.
- für alle k unterscheidet sich $g_{n,k}$ von $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$ in genau einem Bit.

Beweis:

Folgt direkt aus der Definition. □



4.8 Summation und Differenzenoperator

4.8.1 Direkte Methoden

1. Indextransformation:

Sei $i \geq 0$, dann gilt:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{k=n} a_k = \sum_{k-i=m}^{k-i=n} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{k=n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i}$$

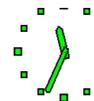


Beispiel 195

$$S_n = 0 \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot a + \dots + n \cdot a = \sum_{k=0}^n k \cdot a$$

Indextransformation: $k \mapsto n - k$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (n - k) \cdot a$$

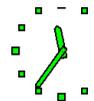




Beispiel (Forts.)

$$S_n = \sum_{k=0}^n (n-k) \cdot a$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n k \cdot a + \sum_{k=0}^n (n-k) \cdot a \right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a = \binom{n+1}{2} \cdot a \end{aligned}$$



2. Induktion

Beispiel 196

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

Nach Berechnen einiger Werte

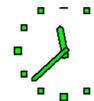
$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 4$$

$$S_3 = 9$$

vermutet man:

$$S_n = n^2$$



Beispiel (Forts.)

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ trivial

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n+1) - 1 \stackrel{IA}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n+1)^2$$

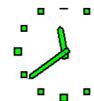


Beispiel (Forts.)

$$S_n = \sum_{k=0}^n (n-k) \cdot a$$

also:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n k \cdot a + \sum_{k=0}^n (n-k) \cdot a \right) \\ &= \frac{n \cdot a}{2} \cdot \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot a = \binom{n+1}{2} \cdot a \end{aligned}$$





Beispiel (Forts.)

Behauptung:

$$S_n = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ trivial

Induktionsschluss: $n \mapsto n + 1$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot (n + 1) - 1 \stackrel{IA}{=} n^2 + 2 \cdot n + 1 = (n + 1)^2$$



Beispiel 197

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$.

Das arithmetische Mittel A der a_i :

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

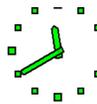
Das geometrische Mittel G der a_i :

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

Das harmonische Mittel H der a_i :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

Wir wollen zeigen: $G \leq A$.



Beispiel (Forts.)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$ trivial, $n = 2$ durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} (G \leq A) &\iff \left(\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \right) \\ &\iff (4a_1 \cdot a_2 \leq (a_1 + a_2)^2) \\ &\iff (0 \leq a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 - a_2)^2) \end{aligned}$$

Induktionsschluss:

Wir zeigen:

$(P_n \wedge P_2) \Rightarrow P_{n+1}$

Sei

$$b := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

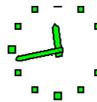
Es gilt:



Beispiel (Forts.)

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i \right) \cdot b^{n-1} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot (a_{n+1} \cdot b^{n-1})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{P_1}{\leq} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^n \cdot \left(\frac{1}{n} (a_{n+1} + (n-1)b) \right)^n \\ &= \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} (a_{n+1} + (n-1)b) \right) \right]^n \\ &\stackrel{P_2}{\leq} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{n} (a_{n+1} + (n-1)b) \right) \right]^{2n} \\ &= \left[\frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i + (n-1)b \right) \right]^{2n} \\ &= b^{2n}. \end{aligned}$$





Beispiel (Forts.)

Eine zweite Beweisvariante verwendet ein etwas ungewöhnliches Induktionsverfahren!
Wir zeigen den Induktionsanfang wie oben und dann für den Induktionsschluss:



Beispiel (Forts.)

Es gilt:

$$\prod_{i=1}^{2n} a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i \right)$$

$$\stackrel{P_2}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \right)^n \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^n$$

$$\stackrel{P_2}{\leq} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \frac{a_i}{n} \right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} a_i \right)^{2n}$$

$$\Rightarrow P_{2n} \quad \square$$

