

Script generated by TTT

Title: Mayr: 2012 ds (18.10.2012)

Date: Thu Oct 18 10:15:52 CEST 2012

Duration: 83:46 min

Pages: 30



4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

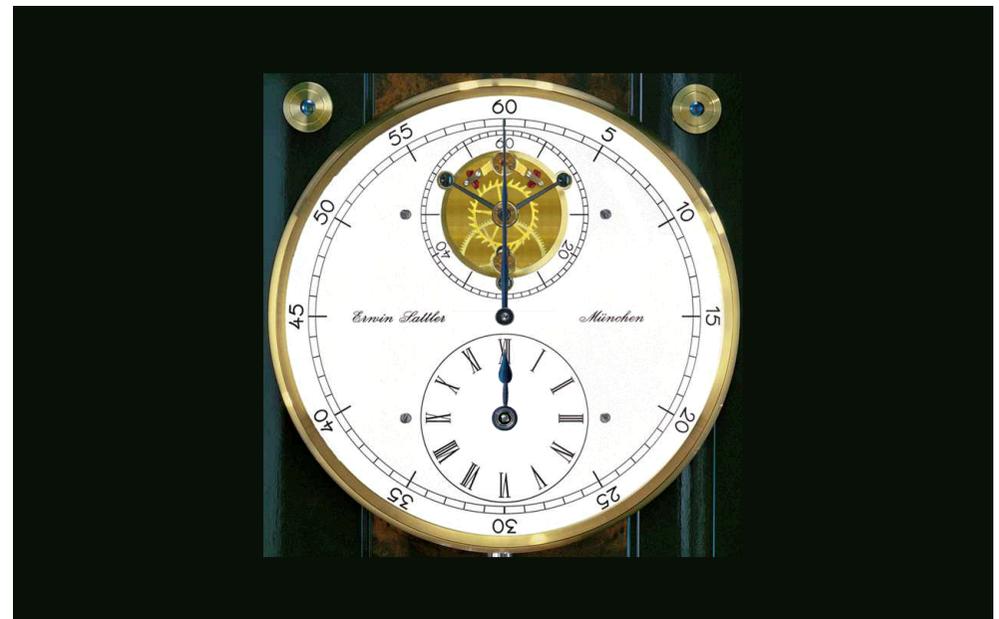
Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
\emptyset	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element



4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

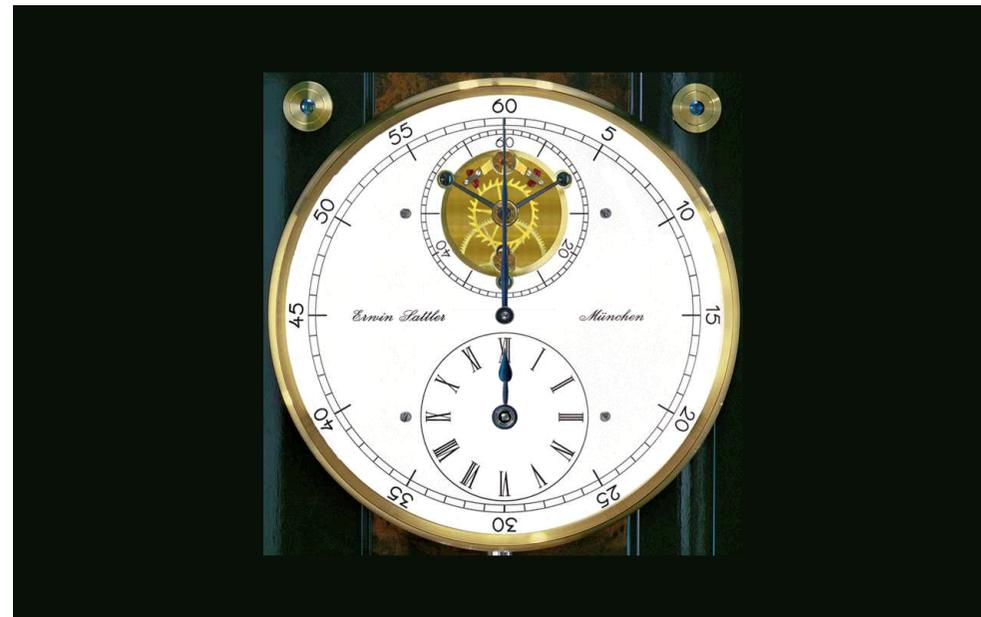
Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
\emptyset	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element



4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$A_2 = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element
$x \notin A$	x nicht Element
$B \subseteq A$	B Teilmenge
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 20/53 LEA

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

File Edit View Window Help Ctavi Picker

Create Print Comment Share

49 of 190 201% Tools Comment Share

4. Mathematische und notationelle Grundlagen

4.1 Mengen

Beispiel 3

$A_1 = \{2, 4, 6, 8\};$
 $A_2 = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0; n \text{ gerade}\}$

Bezeichnungen:

$x \in A \Leftrightarrow A \ni x$	x Element A
$x \notin A$	x nicht Element A
$B \subseteq A$	B Teilmenge von A
$B \subsetneq A$	B echte Teilmenge von A
\emptyset	leere Menge, dagegen:
$\{\emptyset\}$	Menge mit leerer Menge als Element

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.1 Mengen 20/53 LEA

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Spezielle Mengen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
- \mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen
- \mathbb{Q} = Menge der Brüche (rationalen Zahlen)
- \mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen
- \mathbb{C} = Menge der komplexen Zahlen
- $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ Restklassen bei Division durch n
- $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

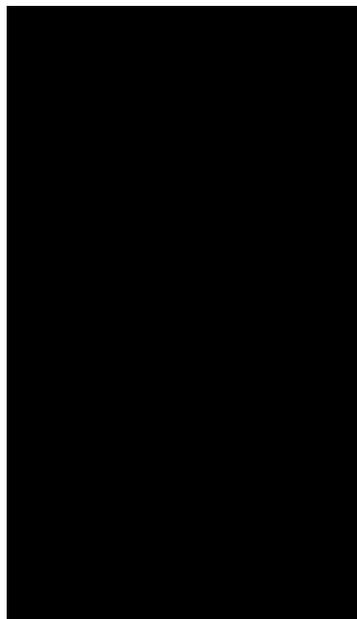
TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 21/53

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetrische Differenz
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartesisches Produkt
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Elemente werden nach ihrer Herkunft unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup_{i=0}^n A_i$ Vereinigung der Mengen A_0, A_1, \dots, A_n
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i mit $i \in I$
- $P(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzmenge der Menge M

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr



Operationen auf Mengen:

- $|A|$ Kardinalität der Menge A
- $A \cup B$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B$ Schnittmenge
- $A \setminus B$ Differenzmenge
- $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ symmetri
- $A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ kartes
- $A \uplus B$ Disjunkte Vereinigung: die Eler unterschiedlich gekennzeichnet
- $\bigcup_{i=0}^n A_i$ Vereinigung der Mengen A_0, A_1
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ Schnittmenge der Mengen A_i m
- $P(M) := 2^M := \{N; N \subseteq M\}$ Potenzi

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Beispiel 4

Für $M = \{a, b, c, d\}$ ist

$$P(M) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \}$$

⋮

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.1 Mengen

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Satz 5
Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:
Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. \square

Bemerkungen:

⋄

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

Rotating Image...

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

4.2 Relationen und Abbildungen
Seien A_1, A_2, \dots, A_n Mengen. Eine Relation über A_1, \dots, A_n ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb .

Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

⋄

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

Rotating Image...

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Satz 5
Die Menge M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $P(M)$ 2^n Elemente!

Beweis:
Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Um eine Menge $L \in P(M)$ (d.h. $L \subseteq M$) festzulegen, haben wir für jedes $i \in [n]$ die (unabhängige) Wahl, a_i zu L hinzuzufügen oder nicht. Damit ergeben sich $2^{|[n]|} = 2^n$ verschiedene Möglichkeiten. \square

Bemerkungen:

- 1 Der obige Satz gilt auch für $n = 0$, also die leere Menge $M = \emptyset$.
- 2 Die leere Menge ist in jeder Menge als **Teilmenge** enthalten.
- 3 $P(\emptyset)$ enthält **als Element** genau \emptyset (also $P(\emptyset) \neq \emptyset$).

⋄

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

4.1 Mengen

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

4.2 Relationen und Abbildungen
Seien A_1, A_2, \dots, A_n Mengen. Eine Relation über A_1, \dots, A_n ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb .

Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

⋄

TUM Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr

25/53 LEA

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

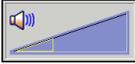
4.2 Relationen und Abbildungen

Seien A_1, A_2, \dots, A_n Mengen. Eine Relation über A_1, \dots, A_n ist eine Teilmenge

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Andere Schreibweise (Infixnotation) für $(a, b) \in R$: aRb .

Eigenschaften von Relationen ($R \subseteq A \times A$):

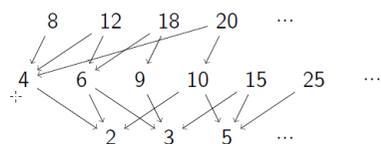
- reflexiv: $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$ 
- symmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
- asymmetrisch: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R \quad \forall a, b \in A$
- antisymmetrisch: $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$
- transitiv: $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \Rightarrow (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A$
- Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv
- Partielle Ordnung (aka *partially ordered set*, *poset*): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Beispiel 6

$(a, b) \in R$ sei $a|b$ „ a teilt b “, $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
Die graphische Darstellung ohne reflexive und transitive Kanten heißt **Hasse-Diagramm**:



Im Diagramm wird $a|b$ durch einen Pfeil $b \rightarrow a$ dargestellt.
Die Relation $|$ stellt eine *partielle Ordnung* dar.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Definition 7

Sei $R \subseteq A \times B$ eine **binäre** Relation. Dann heißt

$$\{a \in A; (\exists b \in B)[(a, b) \in R]\}$$

das **Urbild** der Relation R und

$$\{b \in B; (\exists a \in A)[(a, b) \in R]\}$$

das **Bild** der Relation R .

Definition 8

Sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation. Dann heißt

$$R^{-1} := \{(b, a); (a, b) \in R\}$$

die **inverse** (oder auch **konverse**) Relation zu R .

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Definition 9

Seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Dann heißt

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C; (\exists b \in B)[(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S]\}$$

das **Produkt** der Relationen R und S . Es wird oft auch einfach durch RS bezeichnet.

Satz 10

Das **Relationenprodukt** \circ ist **assoziativ** und **distributiv** über \cup und \cap .

Beweis:
Hausaufgabe! □

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- \forall "für alle" und
- \exists "es gibt"

gebraucht. Dies sind so genannte logische Quantoren, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A; (\exists b \in B)[(a, b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

Die Menge aller Elemente a aus der Menge A , für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a, b) in der Menge/Relation R enthalten ist.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- \forall "für alle" und
- \exists "es gibt"

gebraucht. Dies sind so genannte **logische Quantoren**, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A; (\exists b \in B)[(a, b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

Die Menge aller Elemente a aus der Menge A , für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a, b) in der Menge/Relation R enthalten ist.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.2 Relationen und Abbildungen

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

- $R^0 := \{(a, a); a \in A\} (=: \text{Id}_A)$
- $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k, v) \mid \dots\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die Enkel-Relation.



TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

- Dann ist der **reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss** (auch als **reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle** bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
- Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
- Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m “ ist die Menge der Tupel (k', m') , so dass gilt:

k' hat seine Mitochondrien von m' geerbt.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

- 1 Dann ist der **reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss** (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive **Hülle** bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
- 2 Die **transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.**
- 3 Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

⇩

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m “ ist die Menge der Tupel (k', m') , so dass gilt:

k' hat seine Mitochondrien von m' geerbt.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

- 1 Dann ist der **reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss** (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive **Hülle** bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
- 2 Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
- 3 Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

⇩

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m “ ist die Menge der Tupel (k', m') , so dass gilt:

k' hat seine Mitochondrien von m' geerbt.

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr 4.2 Relationen und Abbildungen

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

4.3 Funktionen

Sei $f : A \rightarrow B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $(f(a), a) \quad \forall a \in A$).

(Eine solche Relation heißt auch **rechtstotal** und **linkseindeutig**.)

⇩

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Bemerkungen:

Man beachte, dass wir für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ die zugehörige Relation \hat{f} als die Menge

$$\{(f(a), a) ; a \in A\}$$

definiert haben, also die Abbildung sozusagen von rechts nach links lesen.

Der Grund dafür ist, dass es in der Mathematik üblich ist, die Komposition (Hintereinanderausführung) einer Funktion g **nach** einer Funktion f (also $g \circ f$) so zu lesen:

g nach f .

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

TUM Diskrete Strukturen ©Ernst W. Mayr Rotating Image...

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

TUM Diskrete Strukturen 4.3 Funktionen ©Ernst W. Mayr Deskewing Image...

2012-ds.pdf - Adobe Acrobat Pro

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe

```
ttt started!  
When finished with lecture,  
Press any key to continue . . .
```

einer Funktion f auf ein Argument x

mentsprechend

$$\circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:
Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

start

(c:\new) - Epsilon (c:\courses\tum\12w... Hypercube - Wikipedi... hypercube interconn... 2012-ds.pdf - Adobe ... kabel.jpg - IrfanView C:\WINDOWS\yste... C:\progra~1\Java\l...

11:39 Donnerstag 18.10.2012