Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (19.06.2012)

Date: Tue Jun 19 14:16:26 CEST 2012

Duration: 88:49 min

Pages: 49

3.2 Zentraler Grenzwertsatz

Satz 81 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, \ldots, n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$).

Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ für $n \to \infty$.

Beweis:

[des Zentralen Grenzwertsatzes] Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem Beispiel)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \ldots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \ldots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \mathrm{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$, und wir können $M_Z(t)$ umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \to e^{t^2/2} \text{ für } n \to \infty.$$

Aus der Konvergenz der momenterzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist Z asymptotisch normalverteilt.

Der Grenzwertsatz von de Moivre (Satz 74) ist ein Korollar des Zentralen Grenzwertsatzes:

Korollar 82 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit

$$H_n := X_1 + \ldots + X_n$$

für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Zentralen Grenzwertsatz, da $\mu = \frac{1}{n}\mathbb{E}[H_n] = p$ und $\sigma^2 = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[H_n] = p(1-p)$. □

Bemerkung

Wenn man $X_1, \ldots, X_n$ als Indikatorvariablen für das Eintreten eines Ereignisses A bei n unabhängigen Wiederholungen eines Experimentes interpretiert, dann gibt H_n die absolute Häufigkeit von A an.

Beweis:

[des Zentralen Grenzwertsatzes] Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem Beispiel)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \ldots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \ldots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n})\,. \end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

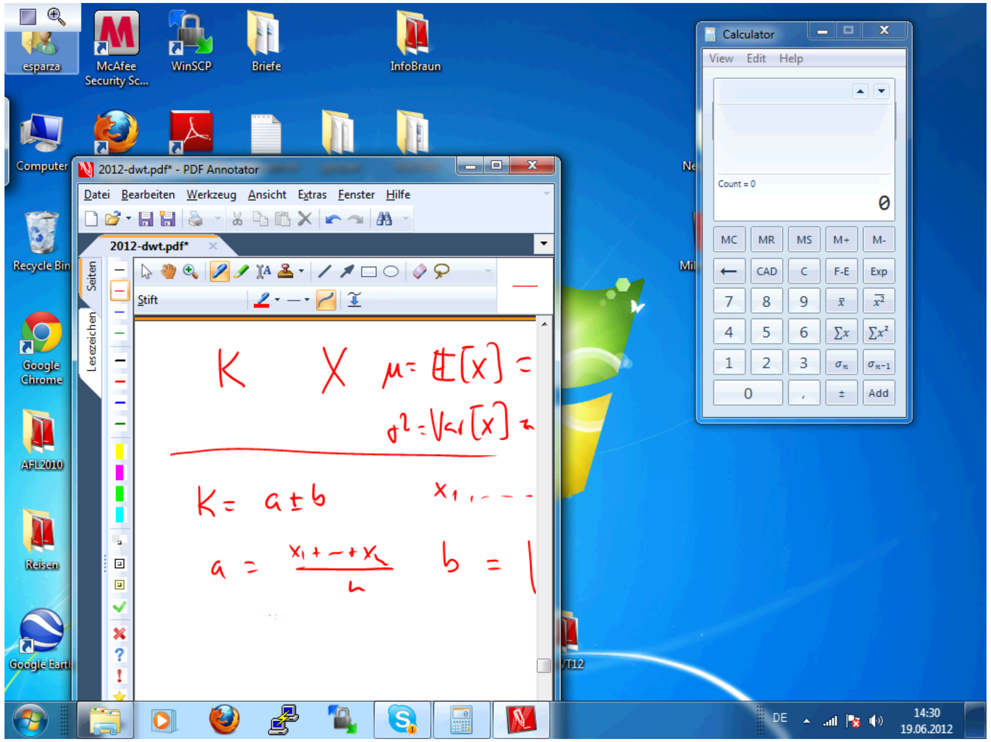
Beispiel 83

Physical constants, National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/constants) (June 2012)

Newtonian constant of gravitation G

Value	6.673 84 $\times$ 10^{-11} m^3 kg^{-1} s$^-2$
Standard uncertainty	0.000 80 $\times$ 10^{-11} m^3 kg^{-1} s$^-2$
Concise form	6.673 84(80) $\times$ 10^{-11} m^3 kg^{-1} s$^-2$

Was ist die "standard uncertainty"?



$K \qquad X \qquad \mu = \mathbb{E}[X] = K$

$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] \approx$

$K = a \pm b \qquad x_1, \ldots, x_n$

$a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad b = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - a)^2}$

Beispiel 83

Physical constants, National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/constants) (June 2012)

Newtonian constant of gravitation G

Value	$6.673\,84 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
Standard uncertainty	$0.000\,80 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
Concise form	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}

Was ist die "standard uncertainty"?

6.67384 ± 80

$K \qquad X \qquad \mu = \mathbb{E}[X] = K$

$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] \approx$

$K = a \pm b \qquad x_1, \dots, x_n$

$\underset{\mu}{a} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \qquad \underset{\sigma}{b} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - a)^2}$

$\frac{Y_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\Pr\left[\boxed{K - \frac{b}{\sqrt{n}}} \le a \le K + \frac{b}{\sqrt{n}}\right] \approx 0{,}68$

$2\sigma \quad 2\sigma \quad \approx 0{,}95$

$3\sigma \quad 3\sigma \quad \approx 0{,}99$

Beispiel 83

Physical constants, National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/constants) (June 2012)

Newtonian constant of gravitation G

Value	$6.673\,84 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s$^-2$
Standard uncertainty	$0.000\,80 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s$^-2$
Concise form	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s$^-2$

Was ist die "standard uncertainty"?

6.67384 ± 80

3.3 Elementarer Beweis des Grenzwertsatzes von de Moivre für $p = 1/2$

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit $\Pr[a \le H_{2n}^* \le b]$ für $p = 1/2$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$. Wenn die Verteilung von H_{2n}^*, wie in Korollar 82 angegeben, gegen $\mathcal{N}(0,1)$ konvergiert, so sollte $\Pr[a \le H_{2n}^* \le b] \approx \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ für genügend große n gelten.

Wir schreiben $f(n) \sim_\infty g(n)$ für $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$, wollen also zeigen:

$$\Pr[a \le H_{2n}^* \le b] \sim_\infty \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Da für $H_{2n} \sim \mathrm{Bin}(2n, 1/2)$ gilt, dass $\mathbb{E}[H_{2n}] = n$ und $\mathrm{Var}[H_{2n}] = n/2$ ist, erhalten wir

$$H_{2n}^* = \frac{H_{2n} - n}{\sqrt{n/2}},$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\Pr[a \le H_{2n}^* \le b] &= \Pr[n + a\sqrt{n/2} \le H_{2n} \le n + b\sqrt{n/2}] \\ &= \sum_{i \in I_n} \Pr[H_{2n} = n + i]\end{aligned}$$

für $I_n := \{z \in \mathbb{Z} \mid a\sqrt{n/2} \le z \le b\sqrt{n/2}\}$. Damit ist

$$\Pr[a \le H_{2n}^* \le b] = \sum_{i \in I_n} \underbrace{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{=:p_{n,i}}.$$

Historisch gesehen entstand Korollar 82 vor Satz 81.

Für den Fall $p = 1/2$ wurde Korollar 82 bereits von Abraham de Moivre (1667–1754) bewiesen. De Moivre war gebürtiger Franzose, musste jedoch aufgrund seines protestantischen Glaubens nach England fliehen. Dort wurde er unter anderem Mitglied der Royal Society, erhielt jedoch niemals eine eigene Professur.

Die allgemeine Formulierung von Korollar 82 geht auf Pierre Simon Laplace (1749–1827) zurück. Allerdings vermutet man, dass die Lösung des allgemeinen Falls $p \ne 1/2$ bereits de Moivre bekannt war.

Beispiel 83

Physical constants, National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/constants) (June 2012)

Newtonian constant of gravitation G

Value	$6.673\,84 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
Standard uncertainty	$0.000\,80 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
Concise form	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}

Was ist die "standard uncertainty"?

6.67384 ± 80

± 160

± 240

und es folgt

$$\begin{aligned}\Pr[a \le H_{2n}^* \le b] &= \Pr[n + a\sqrt{n/2} \le H_{2n} \le n + b\sqrt{n/2}] \\ &= \sum_{i \in I_n} \Pr[H_{2n} = n + i]\end{aligned}$$

für $I_n := \{z \in \mathbb{Z} \mid a\sqrt{n/2} \le z \le b\sqrt{n/2}\}$. Damit ist

$$\Pr[a \le H_{2n}^* \le b] = \sum_{i \in I_n} \underbrace{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{=:p_{n,i}}.$$

Es gilt

$$\max_i p_{n,i} \le p_n^* := \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

und mit der Stirling'schen Approximation für $n!$

$$p_n^* \sim_\infty \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{(n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n})^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ersetzen wir nun die $p_{n,i}$ durch p_n^* so entsteht dabei ein Fehler, den wir mit $q_{n,i} := \frac{p_{n,i}}{p_n^*}$ bezeichnen.

Für $i > 0$ gilt

$$\begin{aligned} q_{n,i} &= \frac{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n!}{(n+i)! \cdot (n-i)! \cdot (2n)!} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1}(n-j)}{\prod_{j=1}^{i}(n+j)} = \prod_{j=1}^{i} \frac{n-j+1}{n+j} = \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Binomialkoeffizienten gilt $q_{n,-i} = q_{n,i}$, womit auch der Fall $i < 0$ abgehandelt ist.

Man macht sich leicht klar, dass $1 - 1/x \le \ln x \le x - 1$ für $x > 0$ gilt. Damit schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \ln\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right)\right) &= \sum_{j=1}^{i} \ln\left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right) \\ &\le -\sum_{j=1}^{i} \frac{2j-1}{n+j} \le -\sum_{j=1}^{i} \frac{2j-1}{n+i} \\ &= -\frac{i(i+1)-i}{n+i} = -\frac{i^2}{n} + \frac{i^3}{n(n+i)} \\ &= -\frac{i^2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

da $i = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ für $i \in I_n$.

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right)\right) &\ge \sum_{j=1}^{i}\left(1 - \left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right)^{-1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i} \frac{-2j+1}{n-j+1} \ge -\sum_{j=1}^{i} \frac{2j-1}{n-i} \\ &= -\frac{i^2}{n-i} = -\frac{i^2}{n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$e^{-\frac{i^2}{n-i} = -\frac{i^2}{n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \le q_{n,i} \le e^{-\frac{i^2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Wegen $e^{\pm\mathcal{O}(1/\sqrt{n})} = 1 \pm o(1)$ folgt daraus $q_{n,i} \sim_\infty e^{-i^2/n}$.

Damit schätzen wir nun $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b]$ weiter ab:

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] = \sum_{i \in I_n} p_n^* \cdot q_{n,i} \sim_\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \sum_{i \in I_n} e^{-i^2/n}}_{=:S_n}.$$

Mit $\delta := \sqrt{2/n}$ können wir die Summe S_n umschreiben zu

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{i \in I_n} \delta e^{-(i\delta)^2 \cdot \frac{1}{2}}.$$

Diese Summe entspricht einer Näherung für $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ durch Aufteilung der integrierten Fläche in Balken der Breite δ. Für $n \to \infty$ konvergiert die Fläche der Balken gegen das Integral, d. h. $S_n \sim_\infty \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

q. e. d.

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right)\right) &\geq \sum_{j=1}^{i}\left(1 - \left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right)^{-1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{i} \frac{-2j+1}{n-j+1} \geq -\sum_{j=1}^{i} \frac{2j-1}{n-i} \\
&= -\frac{i^2}{n-i} = -\frac{i^2}{n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$e^{-\frac{i^2}{n-i}} = e^{-\frac{i^2}{n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \leq q_{n,i} \leq e^{-\frac{i^2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Wegen $e^{\pm\mathcal{O}(1/\sqrt{n})} = 1 \pm o(1)$ folgt daraus $q_{n,i} \sim_\infty e^{-i^2/n}$.

4. Die Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist in gewisser Weise das kontinuierliche Analogon zur geometrischen Verteilung. Wie die geometrische Verteilung ist sie „gedächtnislos“ ist. Sie spielt daher vor allem bei der Modellierung von Wartezeiten eine große Rolle.

Beispiel 37

Aus “Stichworte zu FRM II in Bezug auf Erdbeben in Japan”: FRM II ist analog zu allen deutschen KKWs nach einem Ermessenserdbeben nach der MSK Skala ausgelegt. Die Bemessungsintensität für FRM II lautet $I(MSK) = VI - VII$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $10^{-5}/a$.
(VI: leichte Verputzschäden an Gebäuden. VII: Risse im Verputz, in Wänden und an Schornsteinen.5-0-6.3 auf der Richterskala).

In der seismographischen Region Bayerische Molasse sind aus den vergangenen Jahrhunderten insgesamt 6 tektonische Erdbeben berichtet. Das stärkste mit $I(MSK) = VI$ ereignete sich am 9.10.1935 bei St. Martin in Österriech 135 km östlich von Garching. Auf Grund der Entfernung löste dieses und alle anderen Erdbeben nur sehr schwache Bodenbewegungen in Garching aus mit $I(MSK) = III - IV$.
(III: nur von wenigen Personen gespürt. IV: von vielen Personen gespürt; Geschirr und Fenster klirren.)

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$ gilt daher für die Zufallsvariablen $Y_n := \frac{1}{n}X_n$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Pr[Y_n \le t] &= \lim_{n\to\infty}\Pr[X_n \le t\cdot n]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{tn}\right]\\ &= 1-e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Die Folge Y_n der (skalierten) geometrisch verteilten Zufallsvariablen geht also für $n\to\infty$ in eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ über.

$1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n$

4.2 Die Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

Erinnerung: Die Poisson-Verteilung lässt sich als Grenzwert der Binomialverteilung darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen X_n mit Parameter $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges $k\in\mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n \le k\cdot n$, gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \le kn] &= \sum_{i=1}^{kn}(1-p_n)^{i-1}\cdot p_n = p_n\cdot\sum_{i=0}^{kn-1}(1-p_n)^i\\ &= p_n\cdot\frac{1-(1-p_n)^{kn}}{p_n} = 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.\end{aligned}$$

$1/j$

$\frac{k^n\cdot k-1}{k-1}$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{2j-1}{n+j}\right)\right) &\ge \sum_{j=1}^{i}\left(1-\left(1-\frac{2j-1}{n+j}\right)^{-1}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{i}\frac{-2j+1}{n-j+1} \ge -\sum_{j=1}^{i}\frac{2j-1}{n-i}\\ &= -\frac{i^2}{n-i} = -\frac{i^2}{n}-\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$e^{-\frac{i^2}{n-i}} = e^{-\frac{i^2}{n}-\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \le q_{n,i} \le e^{-\frac{i^2}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Wegen $e^{\pm\mathcal{O}(1/\sqrt{n})} = 1\pm o(1)$ folgt daraus $q_{n,i} \sim_\infty e^{-i^2/n}$.

Beispiel 36 (Forts.)

Die folgende Tabelle zeigt $\Pr[X\le a]$ für $k=3$, $a=5$ und verschiedene Werte von n:

n	$\Pr[X\le 5]$
5	1
6	0.9844
8	0.9640
24	0.9297
$24*60$	0.9163

Für eine Poisson-verteilte Variable X mit $\lambda=3$ erhalten wir $\Pr[X\le 5] = 0.9161$

Analog erhalten wir

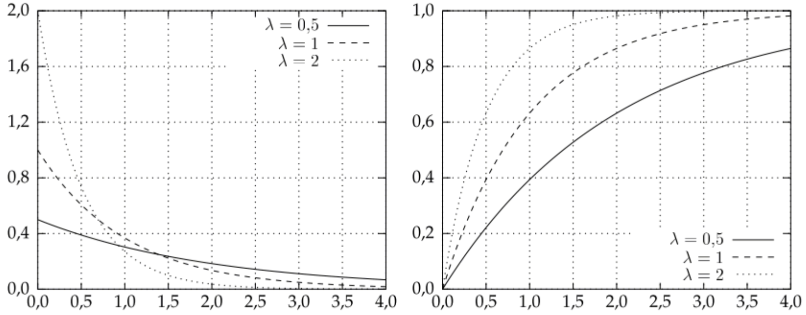
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^2 \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2t \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4.1 Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$



Dichte und Verteilung der Exponentialverteilung

$1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n$

4.2 Die Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

Erinnerung: Die Poisson-Verteilung lässt sich als Grenzwert der Binomialverteilung darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen X_n mit Parameter $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n \le k \cdot n$, gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \le kn] &= \sum_{i=1}^{kn} (1-p_n)^{i-1} \cdot p_n = p_n \cdot \boxed{\sum_{i=0}^{kn-1} (1-p_n)^i} \\ &= p_n \cdot \frac{1-(1-p_n)^{kn}}{p_n} = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.\end{aligned}$$

1/3

$\frac{t^n \cdot t - 1}{t - 1}$

Satz 86 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]\,. \qquad (*)$$

Beweis:

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]}\\ &= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]}\\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]\,.\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$. Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned}g(x + y) &= \Pr[X > x + y]\\ &= \Pr[X > x + y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y]\\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Big) = \Big(g\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

Satz 86 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]\,. \qquad (*)$$

Beweis:

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]}\\ &= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]}\\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]\,.\end{aligned}$$

120

$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$

$A \subseteq B$

$\Pr[X \le x+y] = 1 - e^{-(x+y)}$

Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$. Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned}g(x + y) &= \Pr[X > x + y]\\ &= \Pr[X > x + y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y]\\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Big) = \Big(g\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \leq 1$ muss es daher auch ein $\lambda \geq 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$

□

Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$. Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \Pr[X > x+y] \\ &= \Pr[X > x+y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Big) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

Satz 86 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x+y \mid X > y] = \Pr[X > x]. \qquad (*)$$

Beweis:

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X > x+y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x+y, X > y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{\Pr[X > x+y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]. \end{aligned}$$

$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$

$A \subseteq B$

$\Pr[X \leq x+y] = 1 - e^{-(x+y)}$

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \leq 1$ muss es daher auch ein $\lambda \geq 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$

□

Satz 86 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]\,. \qquad (*)$$

Beweis:

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]} = \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]\,.$$

$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$

$A \subseteq B$

$\Pr[X \le x + y] = 1 - e^{-(x+y)}$

Beweis (Forts.):

$g(1/n) = \Pr[X > 1/n]$

Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$. Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \Pr[X > x + y] \\ &= \Pr[X > x + y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Big) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \le 1$ muss es daher auch ein $\lambda \ge 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

$\square$

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \le 1$ muss es daher auch ein $\lambda \ge 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

$\square$

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \leq 1$ muss es daher auch ein $\lambda \geq 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

$\Pr(X > x)$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$