Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (14.06.2012)

Date: Thu Jun 14 14:39:29 CEST 2012

Duration: 67:07 min

Pages: 39

2.2 Die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Satz 74 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit

$$H_n := X_1 + \ldots + X_n$$

für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Der Satz wird später als Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes bewiesen. (Satz 81 und Korollar 82).

Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Satz 74:

Korollar 75

Sei $H_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von H_n/n konvergiert gegen $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$ für $n \to \infty$.

Beispiel 76

25.05.2012, ZDF: Die Umfragen zu diesem Politbarometer wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 22. bis 24. Mai 2012 bei 1312 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von zehn Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte. Daten zur politischen Stimmung: CDU/CSU: 38 Prozent, SPD: 34 Prozent, FDP: zwei Prozent, Linke: vier Prozent, Grüne: 14 Prozent, Piraten: sechs Prozent.

Wie werden diese Fehlerbereiche berechnet?

2.2 Die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Satz 74 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit

$$H_n := X_1 + \ldots + X_n$$

für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Der Satz wird später als Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes bewiesen. (Satz 81 und Korollar 82).

2.2 Die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Satz 74 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für die Zufallsvariable H_n mit

$$H_n := X_1 + \ldots + X_n$$

für $n \geq 1$, dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Der Satz wird später als Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes bewiesen. (Satz 81 und Korollar 82).

Beispiel 76

25.05.2012, ZDF: Die Umfragen zu diesem Politbarometer wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 22. bis 24. Mai 2012 bei 1312 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von zehn Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte. Daten zur politischen Stimmung: CDU/CSU: 38 Prozent, SPD: 34 Prozent, FDP: zwei Prozent, Linke: vier Prozent, Grüne: 14 Prozent, Piraten: sechs Prozent.

Wie werden diese Fehlerbereiche berechnet?

Beispiel 76 (Forts.)

In diesen Studien wird normalerweise mit einer Konfidenz von 95% gearbeitet. Sei p die W'keit, dass eine zufällig ausgewählte Person angibt, CDU/CSU wählen zu wollen. Zu berechnen ist die Zahl δ, für die die W'keit, dass bei 1312 Befragten das Ergebnis der CDU/CSU im Intervall $[p-\delta, p+\delta]$ liegt, 0.95 beträgt. Es ist bekannt, dass $p \leq 0.4$.

Dazu modellieren wir die Befragung durch folgendes n-stufiges Experiment ($n = 1312$). Eine Urne enthält weisse und schwarze Bälle. In jeder Stufe wird ein zufälliger Ball aus der Urne extrahiert und zurück in die Urne gestellt. Sei p die W'keit, dass der Ball schwarz ist. Für $1 \leq i \leq n$ sei X_i die Bernoulli-verteilte Variable, die angibt, ob der i-te Ball schwarz ist. Die X_i's sind damit unabhängig und identisch verteilt. Für großes n lässt sich die Verteilung der Variable H_n^* durch die Standardnormalverteilung approximieren. Wir nehmen also an, dass $H_n^* \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt.

Beispiel 76 (Forts.)

Es gilt $\Pr[-2 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 2] \approx 0.9554$
(kann z.B. aus Tabellen entnommen werden).

Wir haben

$$\begin{aligned} & 0.95 \\ \approx\ & \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \\ =\ & \Pr[np - 2\sqrt{np(1-p)} \leq H_n \leq np + 2\sqrt{np(1-p)}] \\ =\ & \Pr\left[p - 2\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}} \leq \tfrac{H_n}{n} \leq p + 2\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right] \end{aligned}$$

Damit gilt: bei n befragten und 95% Konfidenz wird eine Fehlertoleranz von ca. $2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ erreicht.

Beispiel 76 (Forts.)

Da $p(1-p) \leq 1/4$ für alle $0 \leq p \leq 1$ erhalten wir

$$0.95 \approx \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \leq \Pr\left[p - \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{H_n}{n} \leq p + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$$

Damit gilt $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle p. In anderen Worten:

unabhängig vom Wert von p wird bei n befragten und 95% Konfidenz eine Fehlertoleranz von ca. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ erreicht.

Bei $n = 1312$ erhalten wir eine Fehlertoleranz von $\frac{1}{\sqrt{1312}} \approx 0.0276$ oder 2,8 Prozentpunkte für alle p.

Für $p \leq 0.4$: $2\sqrt{\frac{0.24}{1312}} \approx 0.0271$ oder 2,7 Prozentpunkte.

Für $p \leq 0.1$: $2\sqrt{\frac{0.09}{1312}} \approx 0.0166$ oder 1,7 Prozentpunkte.

$\Pr[p-\delta \leq \frac{H_n}{n} \leq p+\delta] = 0{,}95$

Beispiel 76 (Forts.)

Es gilt $\Pr[-2 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 2] \approx 0.9554$
(kann z.B. aus Tabellen entnommen werden).

Wir haben

1	0'68
2	0'95
3	0'99
5	$1-10^{-6}$

$H_n^* = \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$\begin{aligned} & 0.95 \\ \approx\ & \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \\ =\ & \Pr[np - 2\sqrt{np(1-p)} \leq H_n \leq np + 2\sqrt{np(1-p)}] \\ =\ & \Pr\left[\underbrace{p - 2\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}}_{\delta} \leq \tfrac{H_n}{n} \leq p + 2\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right] \end{aligned}$$

Damit gilt: bei n befragten und 95% Konfidenz wird eine Fehlertoleranz von ca. $2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ erreicht.

Beispiel 76 (Forts.)

Da $p(1-p) \leq 1/4$ für alle $0 \leq p \leq 1$ erhalten wir

$$0.95 \approx \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \leq \Pr\left[p - \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{H_n}{n} \leq p + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$$

Damit gilt $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle p. In anderen Worten:

unabhängig vom Wert von p wird bei n befragten und 95% Konfidenz eine Fehlertoleranz von ca. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ erreicht.

Bei $n = 1312$ erhalten wir eine Fehlertoleranz von $\frac{1}{\sqrt{1312}} \approx 0.0276$ oder 2,8 Prozentpunkte für alle p.

Für $p \leq 0.4$: $2\sqrt{\frac{0.24}{1312}} \approx 0.0271$ oder 2,7 Prozentpunkte.

Für $p \leq 0.1$: $2\sqrt{\frac{0.09}{1312}} \approx 0.0166$ oder 1,7 Prozentpunkte.

Beispiel 76 (Forts.)

Da $p(1-p) \leq 1/4$ für alle $0 \leq p \leq 1$ erhalten wir

$$0.95 \approx \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \leq \Pr\left[p - \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{H_n}{n} \leq p + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$$

Damit gilt $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle p. In anderen Worten:

unabhängig vom Wert von p wird bei n befragten und 95% Konfidenz eine Fehlertoleranz von ca. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ erreicht.

Bei $n = 1312$ erhalten wir eine Fehlertoleranz von $\frac{1}{\sqrt{1312}} \approx 0.0276$ oder 2,8 Prozentpunkte für alle p.

Für $p \leq 0.4$: $2\sqrt{\frac{0.24}{1312}} \approx 0.0271$ oder 2,7 Prozentpunkte.

Für $p \leq 0.1$: $2\sqrt{\frac{0.09}{1312}} \approx 0.0166$ oder 1,7 Prozentpunkte.

Beispiel 76

25.05.2012, ZDF: Die Umfragen zu diesem Politbarometer wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 22. bis 24. Mai 2012 bei 1312 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von zehn Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte. Daten zur politischen Stimmung: CDU/CSU: 38 Prozent, SPD: 34 Prozent, FDP: zwei Prozent, Linke: vier Prozent, Grüne: 14 Prozent, Piraten: sechs Prozent.

Wie werden diese Fehlerbereiche berechnet?

$\Pr\left[p-\delta \leq \frac{H_n}{n} \leq p+\delta\right] = 0{,}95$

Beispiel 76 (Forts.)

Es gilt $\boxed{\Pr[-2 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 2] \approx 0.9554}$ (kann z.B. aus Tabellen entnommen werden).

1	0,68
2	0,95
3	0,99
5	$1-10^{-6}$

Wir haben

$H_n^* = \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$\begin{aligned} & 0.95 \\ \approx\ & \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \\ =\ & \Pr[np - 2\sqrt{np(1-p)} \leq H_n \leq np + 2\sqrt{np(1-p)}] \\ =\ & \Pr\left[p - \underbrace{2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{\delta} \leq \frac{H_n}{n} \leq p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \end{aligned}$$

Damit gilt: bei n befragten und 95% Konfidenz wird eine Fehlertoleranz von ca. $2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ erreicht. $\frac{1}{4}$

Beispiel 76 (Forts.)

Da $p(1-p) \leq 1/4$ für alle $0 \leq p \leq 1$ erhalten wir

$$0.95 \approx \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \leq \Pr\left[p - \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{H_n}{n} \leq p + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$$

Damit gilt $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle p. In anderen Worten:

unabhängig vom Wert von p wird bei n befragten und 95% Konfidenz eine Fehlertoleranz von ca. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ erreicht.

Bei $n = 1312$ erhalten wir eine Fehlertoleranz von $\frac{1}{\sqrt{1312}} \approx 0.0276$ oder 2,8 Prozentpunkte für alle p.

Für $p \leq 0.4$: $2\sqrt{\frac{0.24}{1312}} \approx 0.0271$ oder 2,7 Prozentpunkte.

Für $p \leq 0.1$: $2\sqrt{\frac{0.09}{1312}} \approx 0.0166$ oder 1,7 Prozentpunkte.

Etwas formaler ausgedrückt gilt: Die Folge der zu Z_n gehörenden Verteilungsfunktionen F_n hat die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir sagen dazu auch: Die Verteilung von Z_n konvergiert gegen die Standardnormalverteilung für $n \to \infty$.

Beispiel 77

New Scientist Physics & Math, 09.02.2012: The Higgs boson is the missing piece of the standard model of physics, the leading theory for how particles and forces interact ... In December, the LHC's two main particle detectors, CMS and ATLAS, each reported excesses of events, such as the appearance of a pair of photons in the shrapnel from particle collisions. These excess events could be due to a Higgs with a mass of around 125 gigaelectron volts ... By convention, researchers only declare a discovery when an anomaly reaches a statistical significance known as 5 sigma, which means there is less than a 1-in-a-million chance it is just a fluke. The size of the anomalies reported by the two detectors in seminar in December was 1.9 sigma for CMS and 2.5 sigma for ATLAS, which indicate a probability of a fluke of roughly 1 per cent.

Wieso bedeutet 5 sigma, dass die W'keit eines Zufallstreffers unter 10^{-6} liegt?

Beispiel 76 (Forts.)

Da $p(1-p) \leq 1/4$ für alle $0 \leq p \leq 1$ erhalten wir

$$0.95 \approx \Pr[-2 \leq H_n^* \leq 2] \leq \Pr\left[p - \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{H_n}{n} \leq p + \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$$

Damit gilt $\delta \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle p. In anderen Worten:

unabhängig vom Wert von p wird bei n befragten und 95% Konfidenz eine Fehlertoleranz von ca. $\frac{1}{\sqrt{n}}$ erreicht.

Bei $n = 1312$ erhalten wir eine Fehlertoleranz von $\frac{1}{\sqrt{1312}} \approx 0.0276$ oder 2,8 Prozentpunkte für alle p.

Für $p \leq 0.4$: $2\sqrt{\frac{0.24}{1312}} \approx 0.0271$ oder 2,7 Prozentpunkte.

Für $p \leq 0.1$: $2\sqrt{\frac{0.09}{1312}} \approx 0.0166$ oder 1,7 Prozentpunkte.

Beispiel 77

Pt P

New Scientist Physics & Math, 09.02.2012: The Higgs boson is the missing piece of the standard model of physics, the leading theory for how particles and forces interact ... In December, the LHC's two main particle detectors, CMS and ATLAS, each reported excesses of events, such as the appearance of a pair of photons in the shrapnel from particle collisions. These excess events could be due to a Higgs with a mass of around 125 gigaelectron volts ... By convention, researchers only declare a discovery when an anomaly reaches a statistical significance known as 5 sigma, which means there is less than a 1-in-a-million chance it is just a fluke. The size of the anomalies reported by the two detectors in seminar in December was 1.9 sigma for CMS and 2.5 sigma for ATLAS, which indicate a probability of a fluke of roughly 1 per cent.

Wieso bedeutet 5 sigma, dass die W'keit eines Zufallstreffers unter 10^{-6} liegt?

2.3 Summe von Normalverteilungen

Satz 78 (Additivität der Normalverteilung)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(1 \le i \le n)$. Es gilt: Die Zufallsvariable

$$Z := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n$ und Varianz $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$.

Beweis:

Wir beweisen zunächst den Fall $n = 2$ und $a_1 = a_2 = 1$. Nach Satz 68 gilt für $Z := X_1 + X_2$, dass

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-y) \cdot f_{X_2}(y)\, \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}_{=:v}\right) \mathrm{d}y.$$

Beweis (Forts.):

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mu &:= \mu_1 + \mu_2 & \qquad v_1 &:= (z-\mu)/\sigma \\ \sigma^2 &:= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \qquad v_2^2 &:= v - v_1^2 \end{aligned}$$

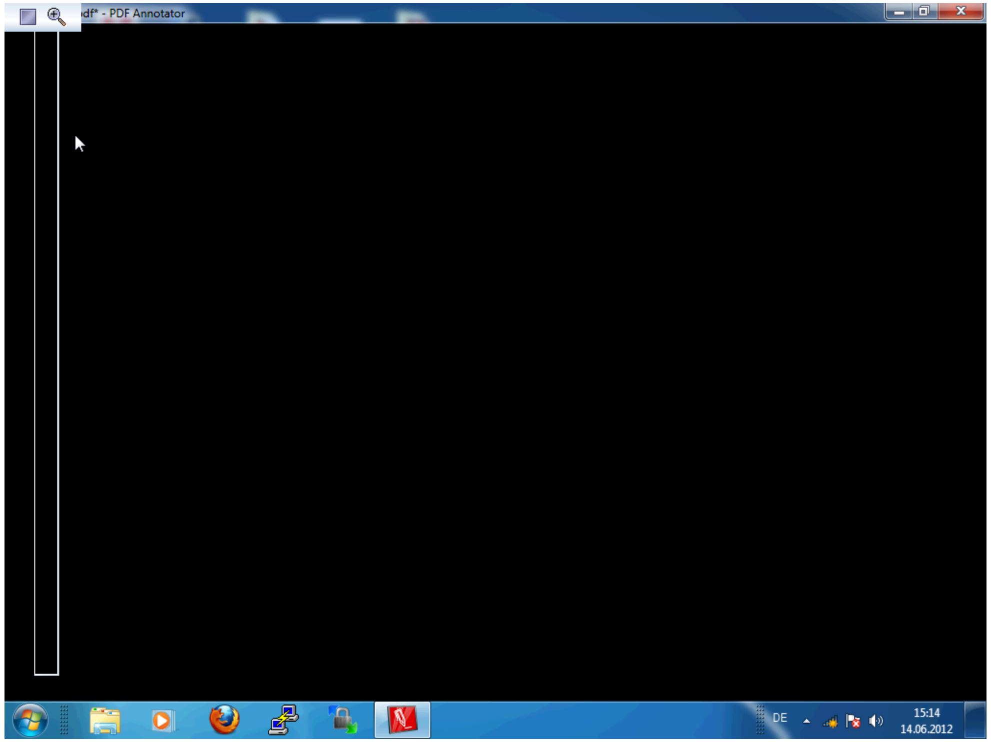
Damit ergibt sich unmittelbar

$$v_2^2 = \frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},$$

woraus wir

$$v_2 = \frac{y\sigma_1^2 - \mu_2\sigma_1^2 + y\sigma_2^2 - z\sigma_2^2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma}$$

ermitteln.



[redacted]

Beispiel (Forts.)

Daraus ergibt sich für $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *wegen* $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\ &= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}[e^{(t\sigma)\cdot\frac{Y-\mu}{\sigma}}] \\ &= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\ &= e^{t\mu+(t\sigma)^2/2}. \end{aligned}$$

[redacted]

Beispiel (Forts.)

Daraus ergibt sich für $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *wegen* $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\ &= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}[e^{(t\sigma)\cdot\frac{Y-\mu}{\sigma}}] \\ &= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\ &= e^{t\mu+(t\sigma)^2/2}. \end{aligned}$$

[redacted]

Weiterer Beweis von Satz 78:

Beweis:

Gemäß dem vorhergehenden Beispiel gilt

$$M_{X_i}(t) = e^{t\mu_i+(t\sigma_i)^2/2}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der X_i folgt

$$\begin{aligned} M_Z(t) = \mathbb{E}[e^{t(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)}] &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{(a_it)X_i}] \\ &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_it) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{a_it\mu_i+(a_it\sigma_i)^2/2} \\ &= e^{t\mu+(t\sigma)^2/2}, \end{aligned}$$

mit $\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$ und $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2$. □

[redacted]

X aX +S

Beispiel (Forts.)

Daraus ergibt sich für $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *wegen* $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned} \boxed{M_Y(t)} &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\ &= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}[e^{(t\sigma)\cdot\frac{Y-\mu}{\sigma}}] \\ &= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\ &= e^{t\mu+(t\sigma)^2/2}. \end{aligned}$$

—

Beweis (Forts.):

Damit folgt für die gesuchte Dichte

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathrm{d}y.$$

Wir substituieren noch

$$t := v_2 \text{ und } \mathrm{d}t = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2} \mathrm{d}y$$

und erhalten

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Mit Lemma 70 folgt, dass $f_Z(z) = \varphi(z; \mu, \sigma)$ ist.

—

Beweis:

[des Zentralen Grenzwertsatzes] Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem Beispiel)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \ldots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \ldots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

—

3.2 Zentraler Grenzwertsatz

Satz 81 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, \ldots, n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$).

3,7 3,5 3,6, 3,7, 4,0

Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für $n \to \infty$.

—

Beweis:

[des Zentralen Grenzwertsatzes] Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem Beispiel)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \ldots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \ldots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

3.2 Zentraler Grenzwertsatz

Satz 81 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, \ldots, n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$).

3,7 3,5 3,6, 3,7, 4,0

Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für $n \to \infty$.

3.2 Zentraler Grenzwertsatz

Satz 81 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von X_i existieren für $i = 1, \ldots, n$ und seien mit μ bzw. σ^2 bezeichnet ($\sigma^2 > 0$).

3,7 3,5 3,6, 3,7, 4,0

Die Zufallsvariablen Y_n seien definiert durch $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ für $n \geq 1$. Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

asymptotisch standardnormalverteilt sind, also $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für $n \to \infty$.

Beweis:

[des Zentralen Grenzwertsatzes] Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem Beispiel)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \ldots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \ldots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}) \,. \end{aligned}$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \mathrm{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$, und wir können $M_Z(t)$ umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \to e^{t^2/2} \text{ für } n \to \infty.$$

Aus der Konvergenz der momentenerzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist Z asymptotisch normalverteilt.

Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \mathrm{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$, und wir können $M_Z(t)$ umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \to e^{t^2/2} \text{ für } n \to \infty.$$

Aus der Konvergenz der momentenerzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist Z asymptotisch normalverteilt.

Beweis:

[des Zentralen Grenzwertsatzes] Wir betrachten $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_i^*] = 1$. Damit gilt (gemäß vorhergehendem Beispiel)

$$M_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \ldots + X_n^*)/\sqrt{n}}]$$
$$= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \ldots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}).$$

Für beliebiges i betrachten wir die Taylorentwicklung von $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

$h'(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbb{E}[e^{tX_i^*}] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty} e^{tx} f_{X_i^*}(x)\, dx$

Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \mathrm{Var}[X] = 1.$$

$e^{-t^2/2}$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt $h(t) = 1 + \boxed{t^2/2} + \mathcal{O}(t^3)$, und wir können $M_Z(t)$ umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \to e^{t^2/2} \text{ für } n \to \infty.$$

Aus der Konvergenz der momentenerzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist Z asymptotisch normalverteilt.

Beweis (Forts.):

Die momentenerzeugende Funktion existiert leider nicht bei allen Zufallsvariablen und unser Beweis ist deshalb unvollständig. Man umgeht dieses Problem, indem man statt der momentenerzeugenden Funktion die so genannte charakteristische Funktion $\tilde{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ betrachtet. Für Details verweisen wir auf die einschlägige Literatur. □