Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (31.05.2012)

Date: Thu May 31 14:23:24 CEST 2012

Duration: 82:45 min

Pages: 42

$$\boxed{G_{X+Y}(s)} = \underbrace{G_X(s) \cdot G_Y(s)}$$

9. Erzeugende Funktionen

Definition 49

Für eine Zufallsvariable X mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ ist die (wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion definiert durch

$$\boxed{G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X]\,.}$$

Eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist also die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $f_i := \Pr[X = i]$.

Kapitel II Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

1. Einführung

Viele Zufallsexperimente haben eine kontinuierliche Menge von möglichen Ergebnisse. Ein Experiment kann z.B. daraus bestehen, die Dauer eines Downloads oder der Übertragung einer e-mail zu messen.

Solche Zufallsexperimente können nicht mit diskreten W'keiträumen modelliert werden. In aller Regel beträgt die W'keit eines Elementarereignisses immer 0. Die Summe der W'keiten der Elementarereignisse beträgt damit 0 statt 1. Wir müssen kontinuierliche W'keiträume einführen, in denen die W'keit eines Ereignisses direkt definiert wird.

Im kontinuierlichen Fall kann nicht jede Menge von Elementarereignissen als Ereignis zugelassen werden. Kolmogorov fand die heute akzeptierte Lösung: die Menge der Ereignisse muss eine σ-Algebra bilden und die W'keitsfunktion muss die Kolmogorov-Axiome erfüllen.

1.1 Kolmogorov-Axiome und σ-Algebren

1.1.1 σ-Algebren

Definition 53

Sei Ω eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(E1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(E2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(E3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Ereignisse.

Für jede (endliche) Menge Ω stellt die Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra dar.

Sei Ω ein Intervall ($[0,1], [0,\infty), [-\infty,\infty)\ldots$). Die Klasse $\mathcal{B}(\Omega)$ der Borel'schen Mengen über Ω bildet eine σ-Algebra. Diese Klasse ist induktiv definiert:

- Jedes geschlossene Subintervall von Ω gehört zu $\mathcal{B}(\Omega)$.
- Wenn $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, dann $\bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$.
- Wenn $A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$.

1.1.2 Kolmogorov-Axiome

Definition 54 (Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov-Axiome)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$\Pr[.] \; : \; \mathcal{A} \to [0,1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. (W1) $\Pr[\Omega] = 1$.
2. (W2) $A_1, A_2, \ldots$ seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

Für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt $\Pr[A]$ die Wahrscheinlichkeit von A. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist definiert durch das Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.

1.1 Kolmogorov-Axiome und σ-Algebren

1.1.1 σ-Algebren

Definition 53

Sei Ω eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(E1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(E2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(E3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Ereignisse.

1.1.2 Kolmogorov-Axiome

Definition 54 (Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov-Axiome)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$\Pr[.] \; : \; \mathcal{A} \to [0,1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. (W1) $\Pr[\Omega] = 1$.
2. (W2) $A_1, A_2, \ldots$ seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

Für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt $\Pr[A]$ die Wahrscheinlichkeit von A. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist definiert durch das Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.

Für jede (endliche) Menge Ω und jede Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$ erfüllt die Abbildung $\Pr$ definiert durch $\Pr[A] = \sum_{\omega\in A} f(\omega)$ die Kolmogorov-Axiome.

Für $\Omega = [0,1]$ sei F die Abbildung, die zu jedem geschlossenen Subintervall $[a,b]$ von $[0,1]$ den Wert $F([a,b]) = b - a$ zuordnet. Man kann zeigen, dass es eine einzige Abbildung $\Pr\colon \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}$ gibt, die mit F auf den geschlossenen Intervallen übereinstimmt und die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

Weitere W'keitabbildungen für ein Intervall Ω können mit Hilfe der Lebesgue-Integral definiert werden.

1.1.2 Kolmogorov-Axiome

Definition 54 (Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov-Axiome)

Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$\Pr[.] \;:\; \mathcal{A} \to [0,1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. (W1) $\Pr[\Omega] = 1$.
2. (W2) $A_1, A_2, \ldots$ seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

Für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt $\Pr[A]$ die Wahrscheinlichkeit von A. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist definiert durch das Tupel $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.

Für jede (endliche) Menge Ω und jede Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$ erfüllt die Abbildung $\Pr$ definiert durch $\Pr[A] = \sum_{\omega\in A} f(\omega)$ die Kolmogorov-Axiome.

Für $\Omega = [0,1]$ sei F die Abbildung, die zu jedem geschlossenen Subintervall $[a,b]$ von $[0,1]$ den Wert $F([a,b]) = b-a$ zuordnet. Man kann zeigen, dass es eine einzige Abbildung $\Pr\colon \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}$ gibt, die mit F auf den geschlossenen Intervallen übereinstimmt und die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

Weitere W'keitabbildungen für ein Intervall Ω können mit Hilfe der Lebesgue-Integral definiert werden.

$(0,1)$ $[0{,}3,\ 0{,}5]$ $[0{,}3,\ 0{,}7]$

$(0,\ 0{,}3) \cup (0{,}5,\ 1)$

Für jede (endliche) Menge Ω stellt die Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra dar.

Sei Ω ein Intervall ($[0,1]$, $[0,\infty)$, $[-\infty,\infty)\ldots$). Die Klasse $\mathcal{B}(\Omega)$ der Borel'schen Mengen über Ω bildet eine σ-Algebra. Diese Klasse ist induktiv definiert:

- Jedes geschlossene Subintervall von Ω gehört zu $\mathcal{B}(\Omega)$.
- Wenn $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, dann $\bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$.
- Wenn $A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$.

$[a,b)$

$[0{,}2,\ 0{,}8] = 0{,}6$

Für jede (endliche) Menge Ω und jede Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$ erfüllt die Abbildung $\Pr$ definiert durch $\Pr[A] = \sum_{\omega\in A} f(\omega)$ die Kolmogorov-Axiome.

Für $\Omega = [0,1]$ sei F die Abbildung, die zu jedem geschlossenen Subintervall $[a,b]$ von $[0,1]$ den Wert $F([a,b]) = b-a$ zuordnet. Man kann zeigen, dass es eine einzige Abbildung $\Pr\colon \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}$ gibt, die mit F auf den geschlossenen Intervallen übereinstimmt und die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

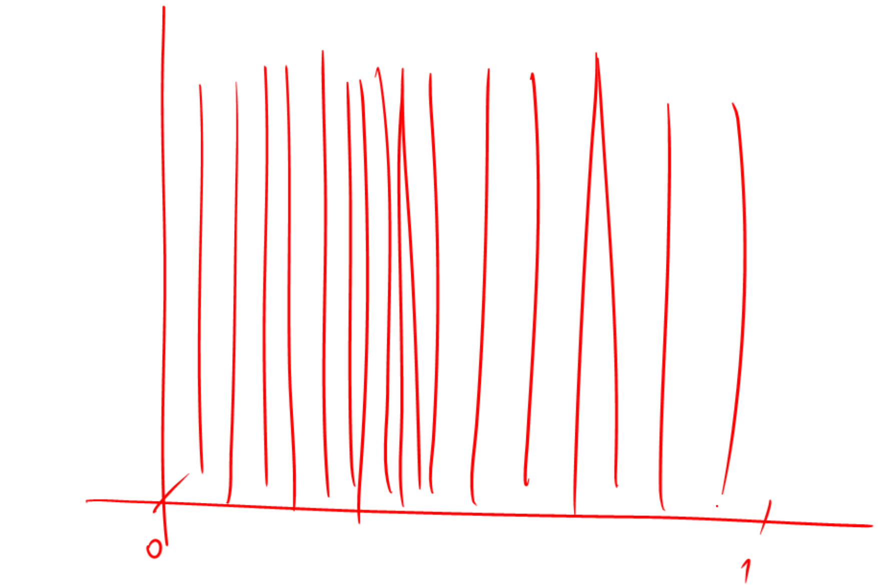
Weitere W'keitabbildungen für ein Intervall Ω können mit Hilfe der Lebesgue-Integral definiert werden.

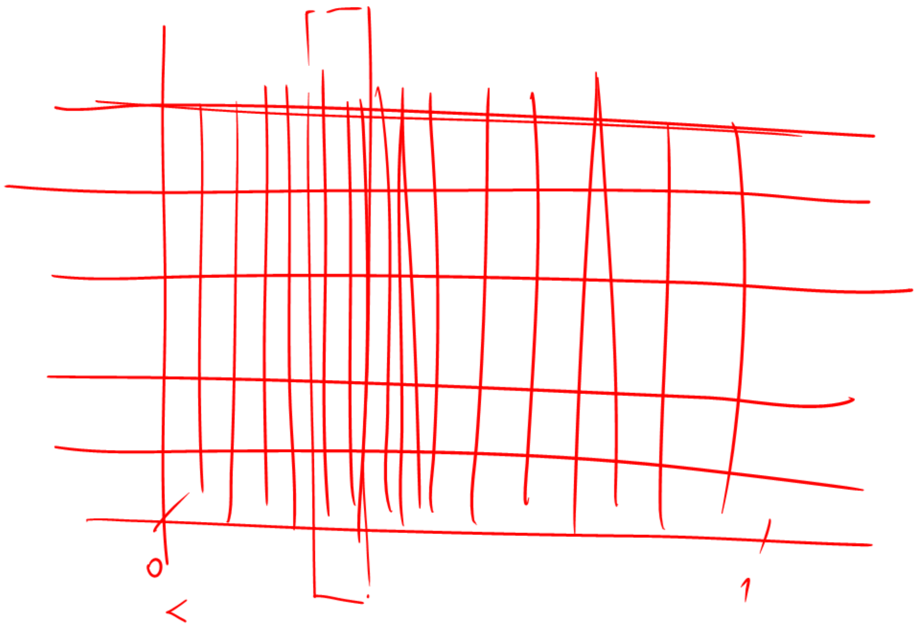
$[0{,}2,\ 0{,}8] = 0{,}6$

Für jede (endliche) Menge Ω und jede Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$ erfüllt die Abbildung $\Pr$ definiert durch $\Pr[A] = \sum_{\omega\in A} f(\omega)$ die Kolmogorov-Axiome.

Für $\Omega = [0,1]$ sei F die Abbildung, die zu jedem geschlossenen Subintervall $[a,b]$ von $[0,1]$ den Wert $F([a,b]) = b-a$ zuordnet. Man kann zeigen, dass es eine einzige Abbildung $\Pr\colon \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}$ gibt, die mit F auf den geschlossenen Intervallen übereinstimmt und die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

Weitere W'keitabbildungen für ein Intervall Ω können mit Hilfe der Lebesgue-Integral definiert werden.





1.1.3 Lebesgue-Integrale

Sei Ω ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge $A \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f \, d\lambda$, zuordnen.

$\int f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$

1.1.3 Lebesgue-Integrale

Sei Ω ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge $A \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f \, d\lambda$, zuordnen.

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ eine messbare Funktion, so definiert

$$\Pr : A \mapsto \int f \cdot I_A \, d\lambda$$

eine Abbildung auf den Borel'schen Mengen, die die Eigenschaft (W2) der Kolmogorov-Axiome erfüllt.

Gilt daher zusätzlich noch $\Pr[\mathbb{R}] = 1$, so definiert f auf natürliche Weise einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, wobei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ die Menge der Borel'schen Mengen ist.

$\int f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$

1.1.3 Lebesgue-Integrale

Sei Ω ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt $\boxed{\text{messbar,}}$ falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

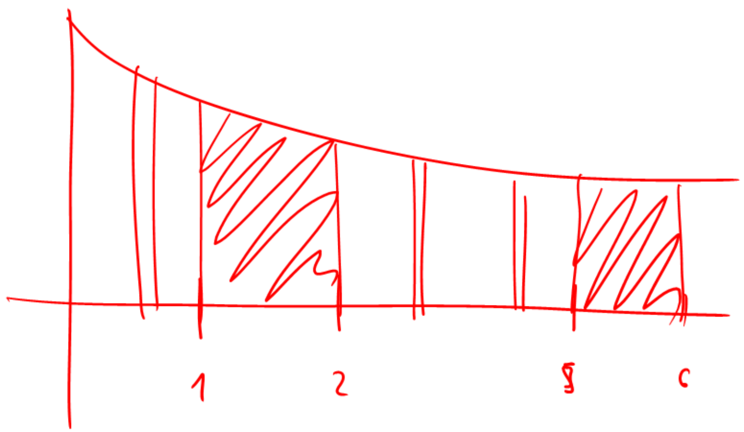
Z.B. ist für jede Borel'sche Menge $A \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f \, d\lambda$, zuordnen.

$f : \Omega \to \mathbb{R} \leftarrow \{0,1\}$



$\int f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$

1.1.3 Lebesgue-Integrale

Sei Ω ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge $A \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f\, d\lambda$, zuordnen.

$f: \Omega \rightleftarrows \mathbb{R} \leftarrow \{0,1\}$

$\int f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$

1.1.3 Lebesgue-Integrale

Sei Ω ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge $A \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f\, d\lambda$, zuordnen.

$f: \Omega \rightleftarrows \mathbb{R} \leftarrow \{0,1\}$

Problem: wie berechnet man $\int f \cdot I_A \, d\lambda$?

Satz 55 (ohne Beweis)

Sei $A = [a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn $\int_a^b f(x)dx$ existiert, dann gilt

$$\int f \cdot I_A \, d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

Der Satz gilt auch für Intervalle $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, oder $(-\infty, \infty)$.

$\int f(x)\,dx \qquad \int f(x)\,dx$

1.1.3 Lebesgue-Integrale

Sei Ω ein Intervall. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge $A \subseteq \Omega$ die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte Lebesgue-Integral, geschrieben $\int f\, d\lambda$, zuordnen.

$f: \Omega \rightleftarrows \mathbb{R} \leftarrow \{0,1\}$

Die in obiger Definition aufgelisteten Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes wurden von dem russischen Mathematiker Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) formuliert. Kolmogorov gilt als einer der Pioniere der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, leistete jedoch auch bedeutende Beiträge zu zahlreichen anderen Teilgebieten der Mathematik. Informatikern begegnet sein Name auch im Zusammenhang mit der so genannten Kolmogorov-Komplexität, einem relativ jungen Zweig der Komplexitätstheorie.

Die Eigenschaften in obiger Definition nennt man auch Kolmogorov-Axiome.

Beispiel 56

Sei $\Omega = [0, \infty)$ (d.h., das Experiment kann jede nichtnegative reelle Zahl als Ergebnis haben).

Sei $f(x) = e^{-x}$. Es gilt $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$.

Die W'keit, dass das Ergebnis 3 ist beträgt

$$\Pr[[3,3]] = \int_3^3 e^{-x} dx = 0$$

Die W'keit, dass das Ergebnis zwischen 3 und 4 liegt beträgt

$$\Pr[[3,4]] = \int_3^4 e^{-x} dx = e^{-3} - e^{-4} \approx 0.031$$

Lemma 57

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A, B, A_1, A_2, … gilt

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \le \Pr[A] \le 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. *Wenn $A \subseteq B$, so folgt* $\Pr[A] \le \Pr[B]$.

Pr[A]

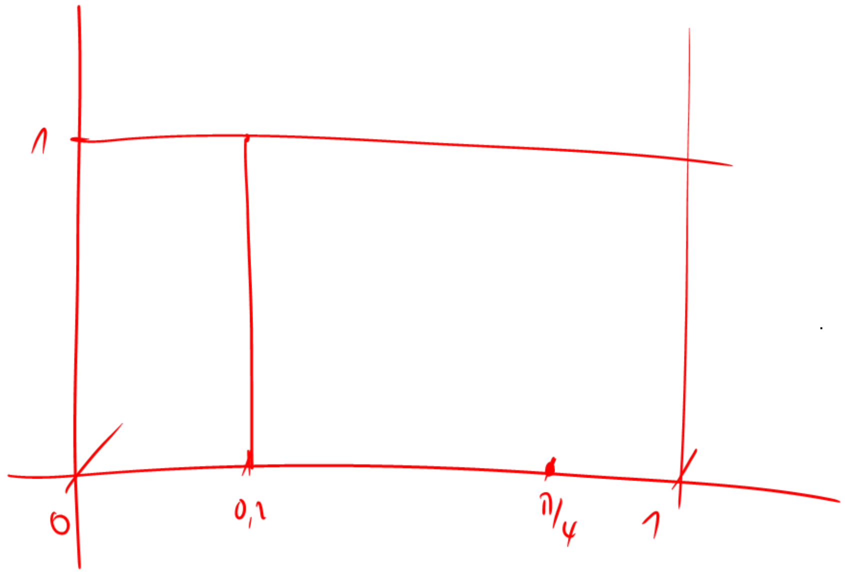
Problem: wie berechnet man $\int f \cdot I_A \, \mathrm{d}\lambda$?

Satz 55 (ohne Beweis)

Sei $A = [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn $\int_a^b f(x)dx$ existiert, dann gilt

$$\int f \cdot I_A \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

Der Satz gilt auch für Intervalle $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, oder $(-\infty, \infty)$.



Lemma 57

5. *(Additionssatz) Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind, so folgt*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse A, B erhalten wir insbesondere

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B].$$

Für eine unendliche Menge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$.

1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Wir betrachten W'keitsräume mit $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Eine stetige Zufallsvariable über einen solchen W'keitsraum wird durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

definiert.

Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte f_X eine Verteilung oder Verteilungsfunktion F_X zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \le x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \le x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

$f_X(3)$ $\Pr[X=3]$

2 3

1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Wir betrachten W'keitsräume mit $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Eine stetige Zufallsvariable über einen solchen W'keitsraum wird durch eine integrierbare Dichte(-funktion) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

$$\int_{-15}^{25} f_X(x)\,dx = 1$$

definiert.

Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte f_X eine Verteilung oder Verteilungsfunktion F_X zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \le x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \le x\}] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\Pr[\bar{A}]$

$1 = \Pr(\Omega) = \Pr[A \cup \bar{A}] = \Pr[A] + \Pr[\bar{A}]$

$\Pr[A_1 \cup A_2] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2]$

Lemma 57

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A, B, A_1, A_2, … gilt

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \le \Pr[A] \le 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. *Wenn* $A \subseteq B$, *so folgt* $\Pr[A] \le \Pr[B]$.