Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (22.05.2012)

Date: Tue May 22 14:23:01 CEST 2012

Duration: 77:59 min

Pages: 30

Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen X_n mit $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, wobei $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges k mit $0 \leq k \leq n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass X_n den Wert k annimmt, gleich

$$\begin{aligned} b(k; n, p_n) &= \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $n \to \infty$ und erinnern uns, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} &= 1, \\ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} &= e^{-\lambda}, \text{ und} \\ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} &= 1. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

7.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ hat den Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$ und besitzt die Dichte

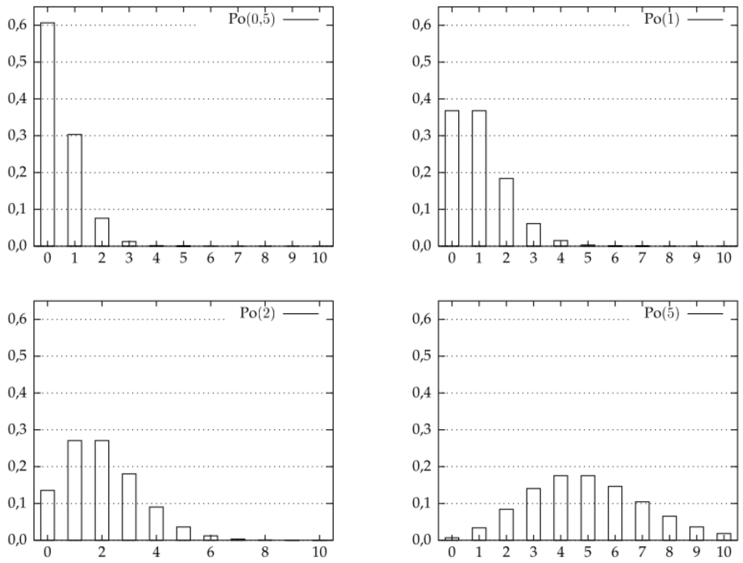
$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

f_X ist eine zulässige Dichte, da

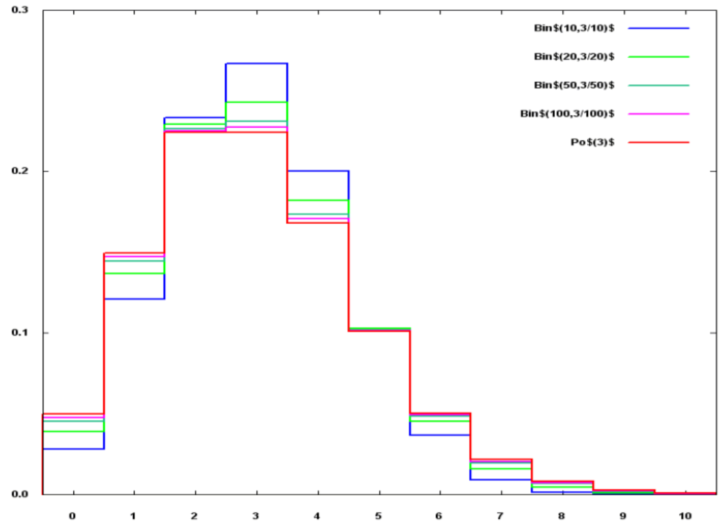
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Dafür, dass eine Zufallsvariable X Poisson-verteilt mit Parameter λ ist, schreiben wir auch

$$X \sim \mathrm{Po}(\lambda).$$



Dichte der Poisson-Verteilung



Vergleich von Binomial- und Poisson-Verteilung

Die folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Die Ereignisse treten nie zur gleichen Zeit auf.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem (kleinen) Zeitintervall δt auftritt, ist proportional zur Länge von δt.
- Die Anzahl der Ereignisse in einem festen Zeitintervall hängt nur von dessen Länge ab, nicht aber von der Lage auf der Zeitachse.
- Wenn man zwei disjunkte Zeitintervalle betrachtet, so sind die Anzahlen der Ereignisse in diesen Zeiträumen voneinander unabhängig.

$p = \frac{\lambda}{n}$ np

Beispiel 36

Beim Kundenservice einer Firma rufen im Durschnitt k Kunden pro Tag an. Wir nehmen an, dass die Kunden zu jedem Zeitpunkt mit der selben W'keit anrufen.

Wir betrachten ein diskretes Modell, in dem der Tag in n gleich lange Zeitintervallen unterteilt wird (jeweils $24/n$ Stunden lang). Unter der Annahme, dass höchstens ein Kunde pro Zeitintervall anruft, ergibt sich für die Anzahl X der Anrufe an einem Tag:

$$\Pr[X \le a] = \sum_{i=0}^{a} \binom{n}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{(n-i)}$$

Beispiel 37

Aus "Stichworte zu FRM II in Bezug auf Erdbeben in Japan": FRM II ist analog zu allen deutschen KKWs nach einem Ermessenserdbeben nach der MSK Skala ausgelegt. Die Bemessungsintensität für FRM II lautet $I(MSK) = VI - VII$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $10^{-5}/a$.
(VI: leichte Verputzschäden an Gebäuden. VII: Risse im Verputz, in Wänden und an Schornsteinen.5-0-6.3 auf der Richterskala).

In der seismographischen Region Bayerische Molasse sind aus den vergangenen Jahrhunderten insgesamt 6 tektonische Erdbeben berichtet. Das stärkste mit $I(MSK) = VI$ ereignete sich am 9.10.1935 bei St. Martin in Österriech 135 km östlich von Garching. Auf Grund der Entfernung löste dieses und alle anderen Erdbeben nur sehr schwache Bodenbewegungen in Garching aus mit $I(MSK) = III - IV$.
(III: nur von wenigen Personen gespürt. IV: von vielen Personen gespürt; Geschirr und Fenster klirren.)

Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in 2013 einmal oder mehr von einem Erdbeben mit $I(MSK) \geq VI - VII$ heimgesucht wird.

Die Anzahl X der Katastrophen in der Region wird durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 10^{-5}$ modelliert.
(Vergleich: nach Wikipedia $\lambda \approx 1000$ für die ganze Welt.)

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq 1] &= 1 - \Pr[X = 0] = 1 - e^{-\lambda} \\
&\approx 1 - 0{,}99999000005 \approx 10^{-5}. \\
\Pr[X \geq 2] &= 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \\
&\approx 1 - 0{,}99999000005 - 0{,}00000999990 = 5 \cdot 10^{-11}.
\end{aligned}$$

Beispiel 37

Aus "Stichworte zu FRM II in Bezug auf Erdbeben in Japan": FRM II ist analog zu allen deutschen KKWs nach einem Ermessenserdbeben nach der MSK Skala ausgelegt. Die Bemessungsintensität für FRM II lautet $I(MSK) = \boxed{VI - VII}$ mit Eintrittswahrscheinlichkeit $10^{-5}/a$.
(VI: leichte Verputzschäden an Gebäuden. VII: Risse im Verputz, in Wänden und an Schornsteinen.5-0-6.3 auf der Richterskala).

In der seismographischen Region Bayerische Molasse sind aus den vergangenen Jahrhunderten insgesamt 6 tektonische Erdbeben berichtet. Das stärkste mit $I(MSK) = VI$ ereignete sich am 9.10.1935 bei St. Martin in Österriech 135 km östlich von Garching. Auf Grund der Entfernung löste dieses und alle anderen Erdbeben nur sehr schwache Bodenbewegungen in Garching aus mit $I(MSK) = III - IV$.
(III: nur von wenigen Personen gespürt. IV: von vielen Personen gespürt; Geschirr und Fenster klirren.)

Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i}}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Summe von Poisson-verteilten Zufallsvariablen

Satz 38

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Po}(\mu)$, dann gilt

$$Z := X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda+\mu)\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^{z}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\cdot\frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}\cdot\sum_{x=0}^{z}\frac{z!}{x!(z-x)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\cdot(\lambda+\mu)^z\frac{1}{z!}\cdot\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}p^x(1-p)^{z-x},\end{aligned}$$

wobei $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Da die Summe gleich 1 ist, folgt

$$f_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)}\cdot(\lambda+\mu)^z\frac{1}{z!}\,.$$

$\square$

8. Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

8.1 Die Ungleichungen von Markov und Chebyshev

Satz 39 (Markov-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \ge t] \le \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[X \ge t\cdot\mathbb{E}[X]] \le 1/t\,.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
t \cdot \Pr[X \geq t] &= t \cdot \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} \Pr[X = x] \\
&\leq \sum_{x \in W_X,\, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x] \\
&\leq \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\
&= \mathbb{E}[X]\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Alternativer Beweis:

Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|X < t] \cdot \Pr[X < t] + \mathbb{E}[X|X \geq t] \cdot \Pr[X \geq t]\,.$$

Wegen $\mathbb{E}[X|X < t] \cdot \Pr[X < t] \geq 0$ und $\mathbb{E}[X|X \geq t] \geq t$ folgt sofort

$$\mathbb{E}[X] \geq t \cdot \Pr[X \geq t]\,.$$

Die folgende Abschätzung ist nach Pavnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) benannt, der ebenfalls an der Staatl. Universität in St. Petersburg wirkte.

Satz 40 (Chebyshev-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, und sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}\,.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \;\leq\; 1/t^2\,.$$

Beweis:

Wir stellen fest, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;=\; \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2]\,.$$

Setze

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2\,.$$

Dann gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{Var}[X]$, und damit mit der Markov-Ungleichung:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;=\; \Pr[Y \geq t^2] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} \;=\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}\,.$$

$\square$

Beispiel 41

Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl X der Würfe, in denen „Kopf“ fällt.

X ist binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$,also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf“ fällt?

Beispiel 41

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 550] \leq \Pr[|X - 500| \geq 50] \leq \frac{250}{50^2} = 0{,}1\,.$$

Setze nun $n = 10000$ und betrachte wieder eine maximal 10%-ige Abweichung vom Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = 5000 \text{ und } \mathrm{Var}[X] = 2500, \text{ und damit}$$

$$\Pr[X \geq 5500] \leq \Pr[|X - 5000| \geq 500] \leq \frac{2500}{500^2} = 0{,}01\,.$$

8.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

Satz 42 (Gesetz der großen Zahlen)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X. Ferner seien $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest. Dann gilt für alle $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X und setzt man

$$Z := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

so gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \;\leq\; \varepsilon.$$

11/20

8.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

Satz 42 (Gesetz der großen Zahlen)

0,05 0,05

Gegeben sei eine Zufallsvariable X. Ferner seien $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest. Dann gilt für alle $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X und setzt man

$$Z := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

so gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \;\leq\; \varepsilon.$$

11/20

8.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

Satz 42 (Gesetz der großen Zahlen)

0,05 0,05

Gegeben sei eine Zufallsvariable X. *Ferner seien* $\varepsilon, \delta > 0$ *beliebig aber fest. Dann gilt für alle* $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ *unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie* X *und setzt man*

$$Z := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},$$

so gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon.$$

Beweis:

Für Z gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

sowie

$$\mathrm{Var}[Z] = \frac{1}{n^2} \cdot (\mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[X] = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n}.$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] = \Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \delta] \leq \frac{\mathrm{Var}[Z]}{\delta^2} = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n\delta^2} \leq \varepsilon,$$

nach Wahl von n. □

Beweis:

Für Z gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

sowie

$$\mathrm{Var}[Z] = \frac{1}{n^2} \cdot (\mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[X] = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n}.$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] = \Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \delta] \leq \frac{\mathrm{Var}[Z]}{\delta^2} = \frac{\mathrm{Var}[X]}{n\delta^2} \leq \varepsilon,$$

nach Wahl von n. □

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.

Sei X eine Indikatorvariable für ein Ereignis A, $\Pr[A] = p$. Somit ist X Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{E}[X] = p$.

$Z = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ gibt die relative Häufigkeit an, mit der A bei n Wiederholungen des Versuchs eintritt, denn

$$Z = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{\text{Anzahl aller Versuche}}.$$

Mit Hilfe des obigen Gesetzes der großen Zahlen folgt

$$\Pr[|Z - p| \geq \delta] \leq \varepsilon,$$

für genügend großes n. Also nähert sich die relative Häufigkeit von A bei hinreichend vielen Wiederholungen des Experiments mit beliebiger Sicherheit beliebig nahe an die „wahre" Wahrscheinlichkeit p an.

11/20

8.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

Satz 42 (Gesetz der großen Zahlen)

0,05 0,05

Gegeben sei eine Zufallsvariable X. Ferner seien $\varepsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest. Dann gilt für alle $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X und setzt man

$$\boxed{Z := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n},}$$

so gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon.$$

1 2

ε δ

8.3 Chernoff-Schranken

8.3.1 Chernoff-Schranken für Summen von 0–1–Zufallsvariablen

Die hier betrachtete Art von Schranken ist nach *Herman Chernoff* (*1923) benannt. Sie finden in der komplexitätstheoretischen Analyse von Algorithmen eine sehr häufige Verwendung.

Satz 43

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ und $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$, sowie jedes $\delta > 0$, dass

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu.$$