Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (15.05.2012)

Date: Tue May 15 14:17:24 CEST 2012

Duration: 90:58 min

Pages: 40

Einfacher Beweis für Satz 12 mit Hilfe von Indikatorvariablen:

Zur Erinnerung:

Satz 12 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\ &\quad + (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]\,.\end{aligned}$$

Einfacher Beweis für Satz 12 mit Hilfe von Indikatorvariablen:

Zur Erinnerung:

Satz 12 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\ &\quad + (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]\,.\end{aligned}$$

$\Pr[\cup A_i]$ $B = \cup A_i$ $\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n$

$A_i \longrightarrow I_i$ $\bar{B} \longrightarrow I_{\bar{B}}$

$I_{\bar{B}}(\omega) = 1$ gdw $\omega \in \bar{B}$

gdw $\omega \in \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n$

gdw $\omega \in \bar{A}_1$ und ... und $\omega \in \bar{A}_n$

gdw $I_1(\omega) = 0$ ... $I_n(\omega) = 0$

gdw $(1 - I_1)(\omega) = 1$ ... $(1 - I_n)(\omega) = 1$

gdw $\prod_{i=1}^{n} (1 - I_i)(\omega) = 1$

$$I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^{n} (1 - I_i)$$

$$I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^{n} (1 - I_i) = (1 - I_1)(1 - I_2) \cdots (1 - I_n)$$

$$= 1 - \sum I_i + \sum I_{i_1} I_{i_2} - \dots$$

6. Formelsammlung

6.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden seien A und B, sowie $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse. Die Notation $A \uplus B$ steht für $A \cup B$ und zugleich $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung). $A_1 \uplus \dots \uplus A_n = \Omega$ bedeutet also, dass die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ eine Partition der Ergebnismenge Ω bilden.

$\Pr[\emptyset] = 0$
$0 \leq \Pr[A] \leq 1$
$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 12	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A\|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.

$B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$\Pr[B] > 0,\ B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i\|B] = \frac{\Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^{n} \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2\|A_1] \cdot$ $\ldots \cdot \Pr[A_n\|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
A und B unabhängig $\iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

7. Wichtige diskrete Verteilungen

Wir diskutieren nun einige wichtige *diskrete* Verteilungen. Bei diesen Verteilungen handelt es sich um Funktionen, die von gewissen *Parametern* abhängen. Eigentlich betrachten wir also immer eine ganze Familie von ähnlichen Verteilungen.

7.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$ und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1, \\ 1 - p & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

heißt Bernoulli-verteilt. Den Parameter p nennen wir Erfolgswahrscheinlichkeit.

Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariablen. Es gilt mit $q := 1 - p$

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ und } \mathrm{Var}[X] = pq,$$

wegen $\mathbb{E}[X^2] = p$ und $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2$.

7.2 Binomialverteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable entspricht der Verteilung *einer* Indikatorvariablen. Häufig betrachtet man jedoch Summen von Indikatorvariablen.

Definition 33

Sei $X := X_1 + \ldots + X_n$ als Summe von n unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p definiert. Dann heißt X binomialverteilt mit den Parametern n und p. In Zeichen schreiben wir

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)\,.$$

$n = 5$ $\quad$ KKKKK $\leftarrow p^5$

KKKKZ $\leftarrow p^4(1-p)$

$\vdots$

ZKKZZ

ZZZZZ $\leftarrow (1-p)^5$

$X(\text{ZKKZZ}) = 2$

$X_1(\text{KKKKK}) = 1 \quad X_1(\text{ZKKKK}) = 0$

$\vdots$

X_n

$$\underline{X(\omega) = X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}$$

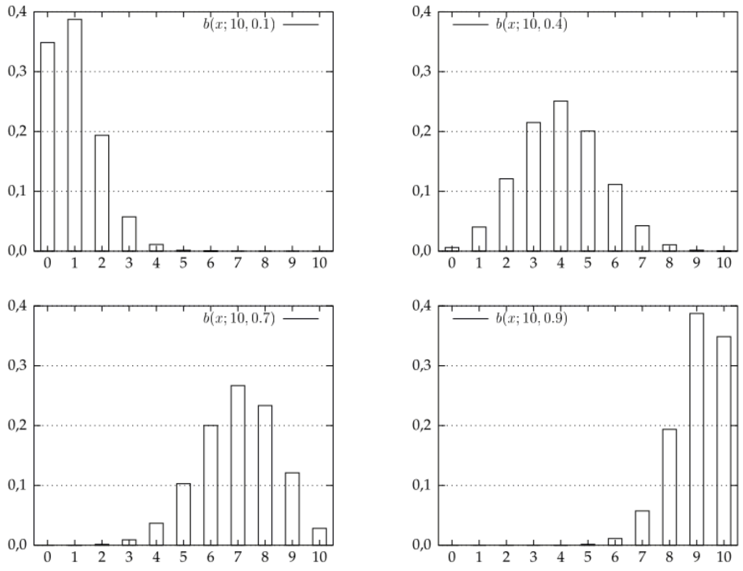
Es gilt $W_X = \{0, \ldots, n\}$. Die Binomialverteilung besitzt die Dichte

$$f_X(x) := b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

mit $q := 1 - p$. Da die Binomialverteilung eine sehr wichtige Rolle spielt, führen wir für die Dichtefunktion die Abkürzung $b(x; n, p)$ ein.

Mit den Sätzen über Erwartungswert und Varianz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen erhalten wir sofort

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = npq\,.$$



Dichte der Binomialverteilung

Satz 34

Wenn $X \sim \mathrm{Bin}(n_x, p)$ *und* $Y \sim \mathrm{Bin}(n_y, p)$ *unabhängig sind, dann gilt für* $Z := X + Y$*, dass* $Z \sim \mathrm{Bin}(n_x + n_y, p)$.

Beweis:

Die Aussage folgt sofort, wenn man gemäß der Definition der Binomialverteilung X und Y als Summen von Indikatorvariablen darstellt. Z ist dann offensichtlich wieder eine Summe von unabhängigen Indikatorvariablen. $\square$

7.3 Geometrische Verteilung

Definition 35

Die Dichte der geometrischen Verteilung mit Parameter/Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ und $q := 1 - p$ ist gegeben durch

$$f_X(i) = pq^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}\,.$$

Für Erwartungswert und Varianz geometrisch verteilter Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2},$$

denn es gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot pq^{i-1} = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$\mathbb{E}[X^2]$ ergibt sich gemäß der Formel (siehe DS I)

$$\sum_{n \ge 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot pq^{i-1} \\
&= p \cdot \left(q \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) \cdot q^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot q^i \right) \\
&= \frac{q \cdot 2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2}\,.$$

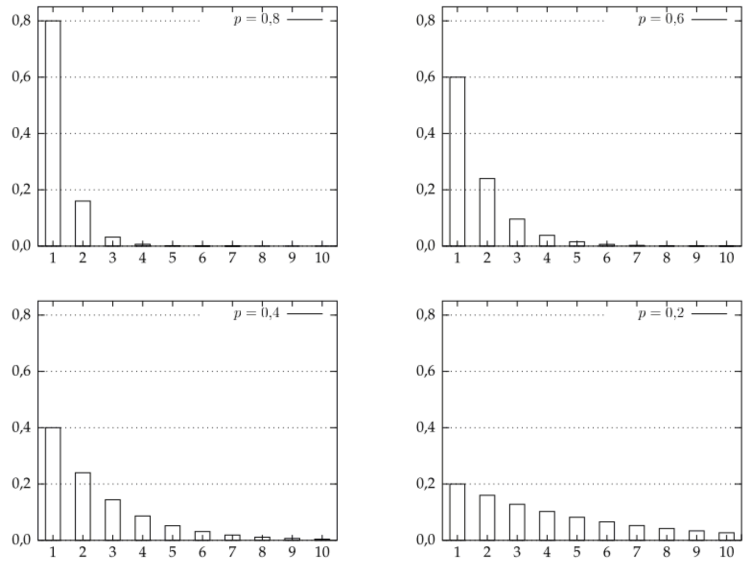
$\mathbb{E}[X^2]$ ergibt sich gemäß der Formel (siehe DS I)

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}}$$

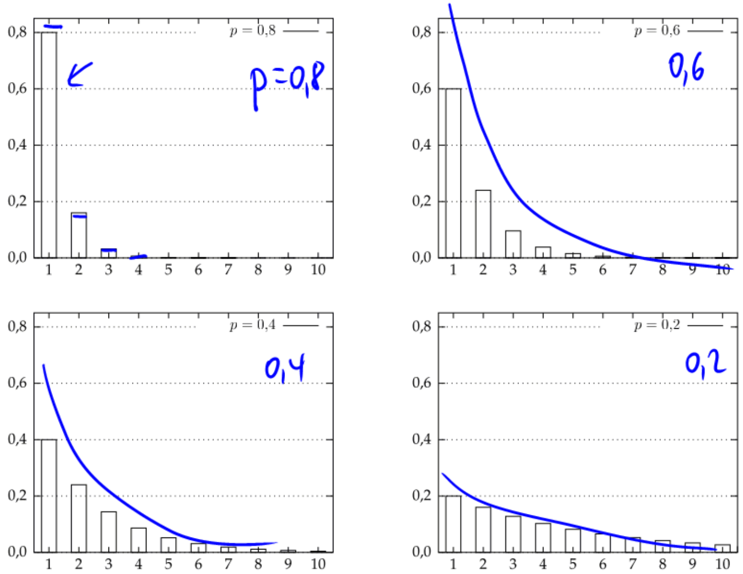
zu

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot pq^{i-1} \\ &= p \cdot \left(q \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) \cdot q^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot q^i \right) \\ &= \frac{q \cdot 2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}\,,\end{aligned}$$

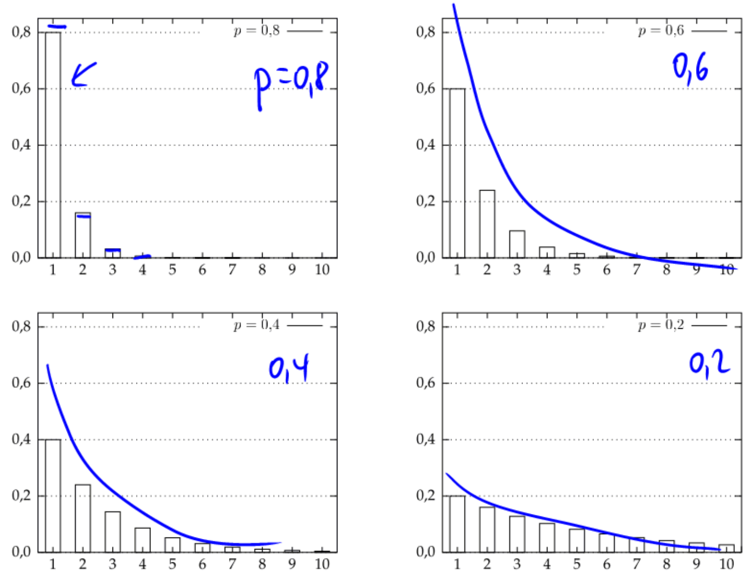
und damit
$$\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2}\,.$$



Dichte der geometrischen Verteilung



Dichte der geometrischen Verteilung



Dichte der geometrischen Verteilung

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann ist $\Pr[X = k]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem binären Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau in der k-ten unabhängigen Wiederholung das erste Mal erfolgreich sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X > y + x \mid X > x]$?

Da bei den ersten x Versuchen kein Erfolg eintrat, stellen wir uns vor, dass das „eigentliche“ Experiment erst ab dem $(x + 1)$-ten Versuch beginnt. Die Zeit bis zum ersten Erfolg bei diesem neuen Experiment nennen wir X'. Damit $X > y + x$ gilt, muss $X' > y$ gelten. Es ist intuitiv, dass X' wieder geometrisch verteilt ist mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, dass also für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Pr[X > y + x \mid X > x] = \Pr[X' > y]. \qquad (6)$$

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann ist $\Pr[X = k]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem binären Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p genau in der k-ten unabhängigen Wiederholung das erste Mal erfolgreich sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X > y + x \mid X > x]$?

Da bei den ersten x Versuchen kein Erfolg eintrat, stellen wir uns vor, dass das „eigentliche“ Experiment erst ab dem $(x + 1)$-ten Versuch beginnt. Die Zeit bis zum ersten Erfolg bei diesem neuen Experiment nennen wir X'. Damit $X > y + x$ gilt, muss $X' > y$ gelten. Es ist intuitiv, dass X' wieder geometrisch verteilt ist mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, dass also für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Pr[X > y + x \mid X > x] = \Pr[X' > y]. \qquad (6)$$

Formal gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x\,,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Pr[X > y + x \mid X > x] &= \frac{\Pr[X > y + x, X > x]}{\Pr[X > x]} \\ &= \frac{\Pr[X > y + x]}{\Pr[X > x]} \\ &= (1-p)^{y+x} \cdot (1-p)^{-x} = (1-p)^y \\ &= \Pr[X > y]\,.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft nennt man *Gedächtnislosigkeit*, da eine geometrisch verteilte Zufallsvariable gewissermaßen vergisst, dass sie schon x Misserfolge hinter sich hat und sich deshalb zum Zeitpunkt $y + x$ genauso verhält wie ursprünglich zur Zeit y.

Formal gilt

$$\Pr[X > x] = \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1}p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i$$

$$= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x ,$$

$A \cap B = A$

$A \subseteq B$

sowie

$$\boxed{\Pr[X > y + x \mid X > x]} = \frac{\Pr[X > y + x \cap X > x]}{\Pr[X > x]}$$

$$= \frac{\Pr[X > y + x]}{\Pr[X > x]}$$

$$= (1-p)^{y+x} \cdot (1-p)^{-x} = \boxed{(1-p)^y}$$

$$= \boxed{\Pr[X > y]} .$$

„$X > y+x$"

$\cap$

„$X > x$"

Warten auf den n-ten Erfolg.
Wir betrachten n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die jeweils geometrisch verteilt sind mit Parameter p, und bestimmen die Dichte der Zufallsvariablen $Z := X_1 + \cdots + X_n$. Damit bezeichnet Z also die Anzahl der Versuche bis zum n-ten erfolgreichen Experiment (einschließlich).

Falls $Z = z$ ist, so werden also genau n erfolgreiche und $z - n$ nicht erfolgreiche Experimente durchgeführt. Dafür gibt es genau $\binom{z-1}{n-1}$ Möglichkeiten, von denen jede mit Wahrscheinlichkeit $p^n(1-p)^{z-n}$ eintritt. Es gilt also

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{z-n} .$$

Die Zufallsvariable Z nennt man negativ binomialverteilt mit Ordnung n.

Das Coupon-Collector-Problem
In manchen Branchen legen Firmen den Verpackungen ihrer Produkte oft kleine Bilder oder andere Gegenstände bei, um den Käufer zum Sammeln anzuregen. Wenn es insgesamt n verschiedene solche Beilagen gibt, wie viele Packungen muss man im Mittel erwerben, bis man eine vollständige Sammlung besitzt? Hierbei nehmen wir an, dass bei jedem Kauf jede Beilage mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Sei

- X die Anzahl der zu tätigenden Käufe, und
- bezeichne Phase i die Schritte vom Erwerb der $(i-1)$-ten Beilage (ausschließlich) bis zum Erwerb der i-ten Beilage (einschließlich).

Sei etwa $n = 4$, und seien die Beilagen mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ identifiziert. Ein Experiment ist z.B.:

$$\underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 3}_{3}, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_{4} .$$

Beobachtung:
Phase i endet genau dann, wenn wir eine der $n - i + 1$ Beilagen erhalten, die wir noch nicht besitzen.

Somit ist X_i geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{n-i+1}{n}$ und es gilt $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$.

Damit folgt aber sofort

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n,$$

wobei $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te harmonische Zahl bezeichnet. Da $H_n = \ln n + O(1)$, folgt $\mathbb{E}[X] = n \ln n + O(n)$.

$\to X = X_1 + \dots + X_n$

Sei etwa $n = 4$, und seien die Beilagen mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ identifiziert. Ein Experiment ist z.B.:

$$\underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 3}_{3}, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_{4}.$$

2 1 3 4

Beobachtung:
Phase i endet genau dann, wenn wir eine der $n - i + 1$ Beilagen erhalten, die wir noch nicht besitzen.

Somit ist X_i geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{n-i+1}{n}$ und es gilt $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$.

$n \quad i \qquad \frac{n-i}{n}$

Damit folgt aber sofort

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n,$$

wobei $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te harmonische Zahl bezeichnet. Da $H_n = \ln n + O(1)$, folgt $\mathbb{E}[X] = n \ln n + O(n)$.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

Damit folgt aber sofort

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1}\\ &= n \cdot \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} = n \cdot H_n,\end{aligned}$$

wobei $H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te harmonische Zahl bezeichnet. Da $H_n = \ln n + O(1)$, folgt $\mathbb{E}[X] = n \ln n + O(n)$.

7.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ hat den Wertebereich $W_X = \mathbb{N}_0$ und besitzt die Dichte

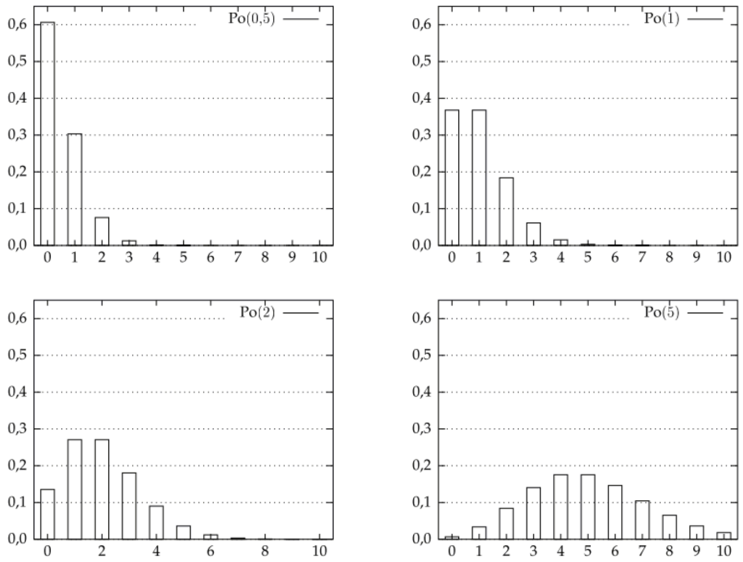
$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

f_X ist eine zulässige Dichte, da

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1\,.\end{aligned}$$

Dafür, dass eine Zufallsvariable X Poisson-verteilt mit Parameter λ ist, schreiben wir auch

$$X \sim \mathrm{Po}(\lambda).$$



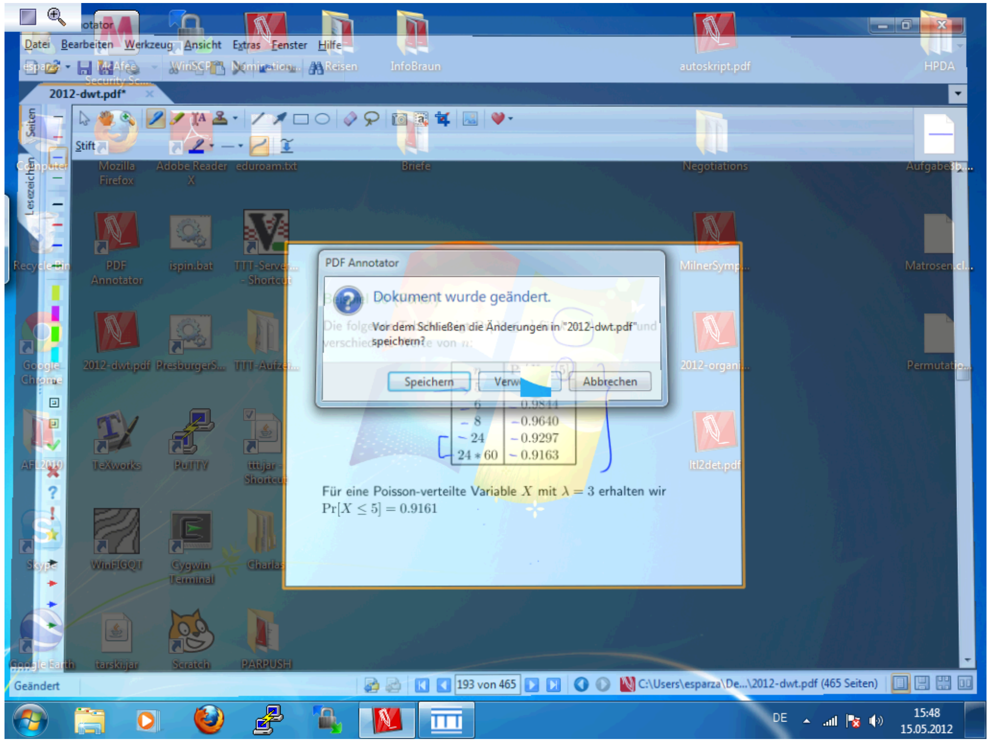
Dichte der Poisson-Verteilung

Beispiel 36 (Forts.)

Die folgende Tabelle zeigt $\Pr[X \le a]$ für $k = 3$, $a = 5$ und verschiedene Werte von n:

n	$\Pr[X \le 5]$
5	1
6	0.9844
8	0.9640
24	0.9297
$24 * 60$	0.9163

Für eine Poisson-verteilte Variable X mit $\lambda = 3$ erhalten wir $\Pr[X \le 5] = 0.9161$


Datei Bearbeiten Werkzeug Ansicht Extras Fenster Hilfe
2012-dwt.pdf*
PDF Annotator
Dokument wurde geändert.
Vor dem Schließen die Änderungen in "2012-dwt.pdf" speichern?
Speichern
Abbrechen
Für eine Poisson-verteilte Variable X mit λ = 3 erhalten wir
Pr[X ≤ 5] = 0.9161
Geändert
193 von 465
C:\Users\esparza\De...\2012-dwt.pdf (465 Seiten)
DE
15:48
15.05.2012