Script generated by TTT

Title: Esparza: Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (24.04.2012)

Date: Tue Apr 24 14:16:41 CEST 2012

Duration: 86:51 min

Pages: 37

Beispiel 3

Eine faire Münze wird geworfen. Zeigt sie Kopf, werden zwei faire Würfel geworfen. Zeigt sie Zahl, wird nur ein fairer Würfel geworfen. Was ist die W'keit, höchstens 4 Augen zu bekommen?

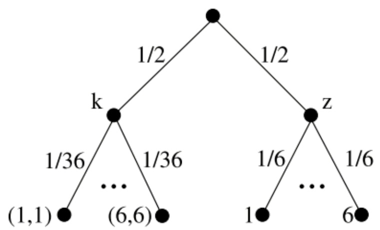
$$\Omega = \{\mathsf{k}\,(1,1), \ldots, \mathsf{k}\,(6,6), \mathsf{z}\,1, \mathsf{z}\,6\}$$

W'keiten der Elementarereignisse:

- $\Pr[\mathsf{k}\,(1,1)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36}$
- $\Pr[\mathsf{k}\,(6,6)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36}$
- $\Pr[\mathsf{z}\,3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$

W'keit, höchstens 4 Augen zu bekommen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{12}$

Mehrstufige Experimente können als Bäume visualisiert werden. Die Elementarereignisse sind die Pfade des Baumes.



Jeder Knoten repräsentiert ein Ereignis (die Menge der Pfade, die den Knoten besuchen). Frage: Welche W'keit hat dieses Ereignis?

Beispiel 4

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis die gleiche Seite zweimal hintereinander fällt. Mit welcher W'keit ist die Anzahl der Würfe gerade?

Dann ist

$$\Omega = \{\mathsf{kk}, \mathsf{zz}, \mathsf{kzz}, \mathsf{zkk}, \mathsf{kzkk}, \mathsf{zkzz} \ldots\}$$

Die W'keit eines Elementarereignisses der Länge n beträgt 2^{-n}.

Es gilt:

$$\Pr[\text{gerade}] = \Pr[\mathsf{kk}] + \Pr[\mathsf{zz}] + \Pr[\mathsf{kzkk}] + \ldots$$

Beispiel 4

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis die gleiche Seite zweimal hintereinander fällt. Mit welcher W'keit ist die Anzahl der Würfe gerade?

Dann ist

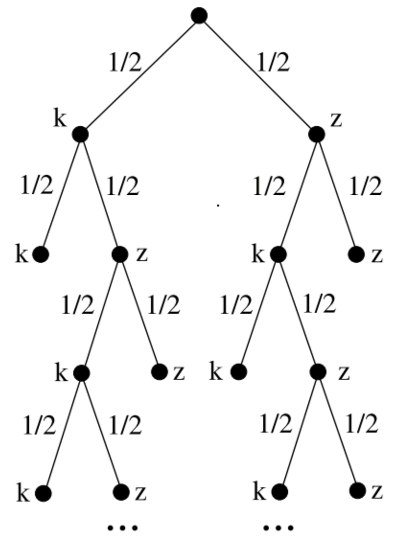
$$\Omega = \{\text{kk, zz, kzz, zkk, kzkk, zkzz} \ldots\}$$

Die W'keit eines Elementarereignisses der Länge n beträgt 2^{-n}.

Es gilt:

$$\Pr[\text{gerade}] = \Pr[\text{kk}] + \Pr[\text{zz}] + \Pr[\text{kzkk}] + \ldots$$

Visualisierung als Baum:



Beispiel 5 (Forts.)

Ein "abstrakteres" Modell kann durch Bündelung gewonnen werden: die Elementarereignisse sind nun die Anzahlen der Würfe.

$$\Omega = \{2, 3, 4 \ldots\} .$$

Ein Elementarereignis dieses Modells entspricht einer Menge von Elementarereignissen des ersten Modells.

Frage: Was sind die W'keiten der einzelnen Elementarereignisse?

Beispiel 5 (Forts.)

$$\begin{aligned}
\Pr[2i] &= \Pr[(\mathsf{kz})^{(i-1)}\mathsf{kk}] + \Pr[(\mathsf{zk})^{(i-1)}\mathsf{zz}] \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-1} \\
\Pr[\text{gerade}] &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[2i] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i-1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Beispiel 6 (Das Ziegenproblem)

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten "Ich zeige Ihnen mal was" öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: "Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen sie Nummer zwei? "

Frage: Welche Tür hat bessere Chancen?

- Nummer eins.
- Nummer zwei.
- Beide gleich.

Beispiel 6 (Forts.: Modellierung des Ziegenproblems I)

Wir vergleichen zwei Experimente: Im ersten Experiment bleiben Sie immer bei der Tür, die Sie gewählt haben. Im zweiten Modell wechseln Sie immer die Tür.

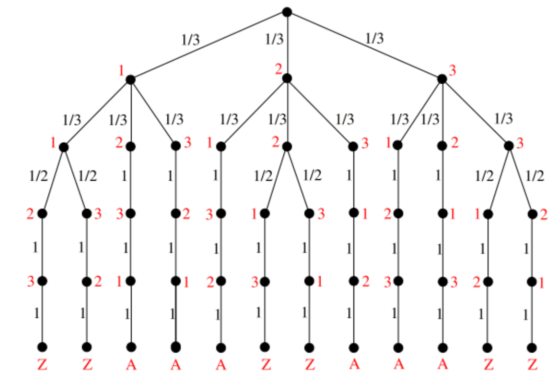
Annahmen: Das Auto wird mit W'keit $1/3$ hinter Tür 1, 2, oder 3 gestellt. Sie wählen eine Tür mit W'keit $1/3$. Wenn der Moderator zwei Türen aufmachen kann, dann wählt er eine Tür mit W'keit $1/2$.

Elementarereignis: (Tür-des-Autos
Ihre-erste-Wahl
Wahl-des-Moderators
Ihre-zweite-Wahl
Ergebnis)

Beispiel 6 (Forts.: Modellierung des Ziegenproblems I)

- Experiment "Ich wechsle"

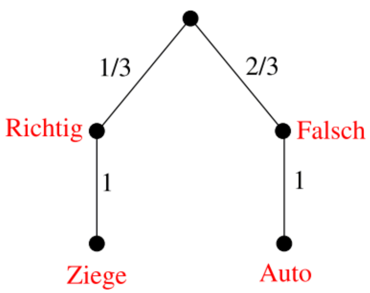
$$\Omega_w = \{(1\,1\,2\,3\,Z), (1\,1\,3\,2\,Z), (1\,2\,3\,1\,A), \ldots, (3\,3\,2\,1\,Z)\}$$



$\Pr[\text{Auto}] = \frac{2}{3}$

Beispiel 6 (Forts.: Modellierung des Ziegenproblems II)

$$\Omega_w = \{\text{Richtig.Ziege}, \text{Falsch.Auto}\}$$



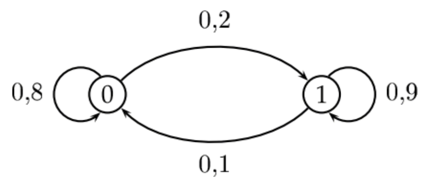
$\Pr[\text{Auto}] = \Pr[\text{Falsch.Auto}] = \frac{2}{3}$.

Viele mehrstufige Zufallsexperimente können graphisch mit Markov-Diagrammen dargestellt werden.

Definition 7

Ein Markov-Diagramm $D = (Q, T, \delta)$ besteht aus einer endlichen Menge Q von Zuständen, einer Menge $T \subseteq Q \times Q$ von Transitionen, und einer W'keitsfunktion δ, die jede Transition t einer Zahl $0 < \delta(t) \leq 1$ zuordnet und Folgendes erfüllt:

$$\sum_{\{r \in Q \mid (q,r) \in T\}} \delta((q,r)) = 1$$



Viele mehrstufige Zufallsexperimente können graphisch mit Markov-Diagrammen dargestellt werden.

Definition 7

Ein Markov-Diagramm $D = (Q, T, \delta)$ besteht aus einer endlichen Menge Q von Zuständen, einer Menge $T \subseteq Q \times Q$ von Transitionen, und einer W'keitsfunktion δ, die jede Transition t einer Zahl $0 < \delta(t) \leq 1$ zuordnet und Folgendes erfüllt:

$$\sum_{\{r \in Q \mid (q,r) \in T\}} \delta((q,r)) = 1$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "0{,}8"] \arrow[r, bend left, "0{,}2"] & 1 \arrow[loop right, "0{,}9"] \arrow[l, bend left, "0{,}1"] \end{tikzcd}$$

Wir zeigen, wie W'keitsräume aus Markov-Diagramme gewonnen werden können.

Ein (endlicher) Pfad von D ist eine endliche Sequenz $q_0 q_1 \ldots q_k$ von Zuständen mit $k \geq 1$ und $(q_i, q_{i+1}) \in T$ für alle $0 \leq i \leq k-1$. (Ein Zustand darf mehrmals in einem Pfad vorkommen.)
Die Länge von $q_0 q_1 \ldots q_k$ ist k.

Einen Pfad $\pi = q_0 q_1 \ldots q_k$ von D ordnen wir einer W'keit

$$\Pr[\pi] = \prod_{i=0}^{k-1} \delta(q_i, q_{i+1})$$

Für eine Menge Π von Pfaden definieren wir $\Pr[\Pi] = \sum_{\pi \in \Pi} \Pr[\pi]$.

Satz 8

Seien q, r verschiedene Zustände eines Markov-Diagramms mit der Eigenschaft: jeder Zustand liegt auf mindestens einen Pfad von q nach r. Sei Π_q^r die Menge aller Pfaden des Diagramms von q nach r, die r genau einmal besuchen. Dann $\Pr[\Pi_q^r] = 1$.

Beweis:

Für jeden Zustand z und jedes $k \geq 1$, sei $\Pi_{z,k}$ die Menge der Pfaden aus z der Länge k, und seien $\Pi_{z,k}^1$ ($\Pi_{z,k}^0$) die Pfaden aus $\Pi_{z,k}$, die r, vielleicht mehrmals, besuchen (nicht besuchen). Wir haben:

(1) Für alle z und alle $k \geq 1$: $\Pr[\Pi_{z,k}] = 1$.
Beweis: Einfache Induktion über k.

(2) Sei n die Anzahl der Knoten von D. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für jeden z gilt: $\Pr[\Pi_{z,n}^1] \geq \epsilon$.
Beweis: weil $\Pi_{z,n}$ immer mindestens einen Pfad enthält, der r besucht (denn r ist aus jedem Zustand erreichbar).

Satz 8

Seien q, r verschiedene Zustände eines Markov-Diagramms mit der Eigenschaft: jeder Zustand liegt auf mindestens einen Pfad von q nach r. Sei Π_q^r die Menge aller Pfaden des Diagramms von q nach r, die r genau einmal besuchen. Dann $\Pr[\Pi_q^r] = 1$.

Beweis:

Für jeden Zustand z und jedes $k \geq 1$, sei $\Pi_{z,k}$ die Menge der Pfaden aus z der Länge k, und seien $\Pi_{z,k}^1$ ($\Pi_{z,k}^0$) die Pfaden aus $\Pi_{z,k}$, die r, vielleicht mehrmals, besuchen (nicht besuchen). Wir haben:

(1) Für alle z und alle $k \geq 1$: $\Pr[\Pi_{z,k}] = 1$.
Beweis: Einfache Induktion über k.

(2) Sei n die Anzahl der Knoten von D. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für jeden z gilt: $\Pr[\Pi_{z,n}^1] \geq \epsilon$.
Beweis: weil $\Pi_{z,n}$ immer mindestens einen Pfad enthält, der r besucht (denn r ist aus jedem Zustand erreichbar).

Beweis (Forts.):

(3) $\Pr[\Pi_{q,n}^0] \leq 1 - \epsilon$, $\Pr[\Pi_{q,2n}^0] \leq (1-\epsilon)^2$ und, allgemein, $\Pr[\Pi_{q,kn}^0] \leq (1-\epsilon)^k$ für alle $k \geq 0$.
Beweis: aus (1) und (2) durch Induktion über $k \geq 0$.

Aus (1)-(3) folgt:

$$\begin{aligned}
\Pr[\Pi_q^r] &= \lim_{k\to\infty} \Pr[\Pi_{q,k}^1] \\
&= \lim_{k\to\infty} (1 - \Pr[\Pi_{q,k}^0)]) && \text{(wegen (1))} \\
&\geq \lim_{k\to\infty} (1 - (1-\epsilon)^k) = 1 && \text{(wegen (3))}
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis (Forts.):

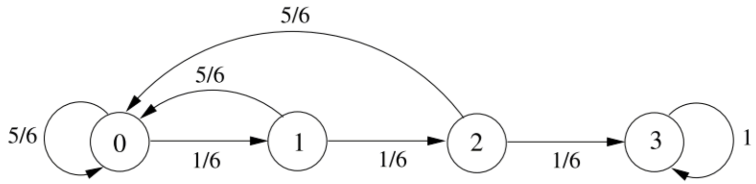
(3) $\Pr[\Pi^0_{q,n}] \leq 1-\epsilon$, $\Pr[\Pi^0_{q,2n}] \leq (1-\epsilon)^2$ und, allgemein, $\Pr[\Pi^0_{q,kn}] \leq (1-\epsilon)^k$ für alle $k \geq 0$.
Beweis: aus (1) und (2) durch Induktion über $k \geq 0$.

Aus (1)-(3) folgt:

$$\begin{aligned}\Pr[\Pi^r_q] &= \lim_{k\to\infty} \Pr[\Pi^1_{q,k}] \\ &= \lim_{k\to\infty} (1-\Pr[\Pi^0_{q,k})]) && \text{(wegen (1))} \\ &\geq \lim_{k\to\infty} (1-(1-\epsilon)^k) = 1 && \text{(wegen (3))}\end{aligned}$$

Beispiel 9

Ein Würfel wird geworfen, bis dreimal hintereinander eine Sechs geworfen wird. Die Sequenzen von Würfen, die mit drei Sechsen Enden, können durch ein Markov-Diagramm dargestellt werden. Mit Satz 8 gewinnen wir einen W'keitsraum für die Pfaden aus 0, die 3 besuchen.



$\bar{E}$ heißt komplementäres Ereignis zu E.

Allgemein verwenden wir bei der Definition von Ereignissen alle bekannten Operatoren aus der Mengenlehre. Wenn also A und B Ereignisse sind, dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ etc. Ereignisse.

Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt oder auch unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Definition 10

Ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ heißt endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen werden wir oft nur den Fall $\Omega = \mathbb{N}_0$ betrachten. Dies stellt keine große Einschränkung dar, da wir statt einer Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ auch $\mathbb{N}_0$ als Ergebnismenge verwenden können, indem wir ω_i mit $i-1$ identifizieren. Wir sagen, dass durch die Angabe der Elementarwahrscheinlichkeiten ein Wahrscheinlichkeitsraum auf Ω definiert ist.

Lemma 11

Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots$ gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \le \Pr[A] \le 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. *Wenn* $A \subseteq B$, *so folgt* $\Pr[A] \le \Pr[B]$.

Lemma 11 (Forts.)

5. *(Additionssatz) Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so folgt*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse A, B erhalten wir insbesondere

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] .$$

Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i] .$$

Eigenschaft 5 in Lemma 11 gilt nur für disjunkte Ereignisse. Für den allgemeinen Fall erhalten wir folgenden

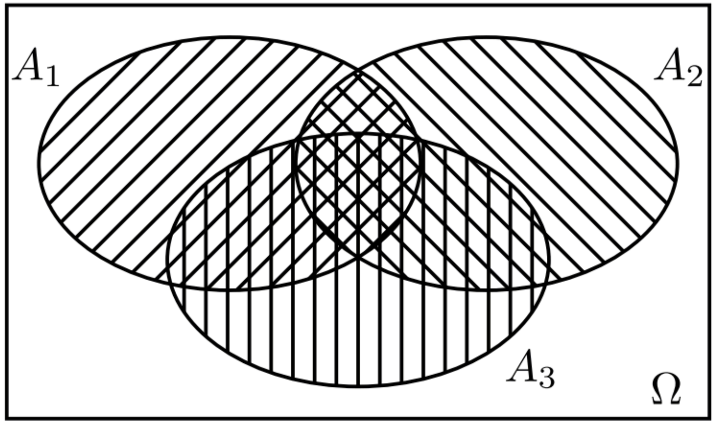
Satz 12 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ ($n \ge 2$) gilt:

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] .\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Der Fall $n = 3$:



Man beachte, dass durch die im Satz angegebene Summe jedes Flächenstück insgesamt genau einmal gezählt wird.

Eigenschaft 5 in Lemma 11 gilt nur für disjunkte Ereignisse. Für den allgemeinen Fall erhalten wir folgenden

Satz 12 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]\,.\end{aligned}$$

Eigenschaft 5 in Lemma 11 gilt nur für disjunkte Ereignisse. Für den allgemeinen Fall erhalten wir folgenden

Satz 12 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]\,.\end{aligned}$$

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Dazu setzen wir $C := A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Gemäß dieser Definition gilt, dass C und $A \cap B$ sowie C und B disjunkt sind. Deshalb können wir Eigenschaft 5 von Lemma 11 anwenden:

$$\Pr[A] = \Pr[C \cup (A \cap B)] = \Pr[C] + \Pr[A \cap B]\,.$$

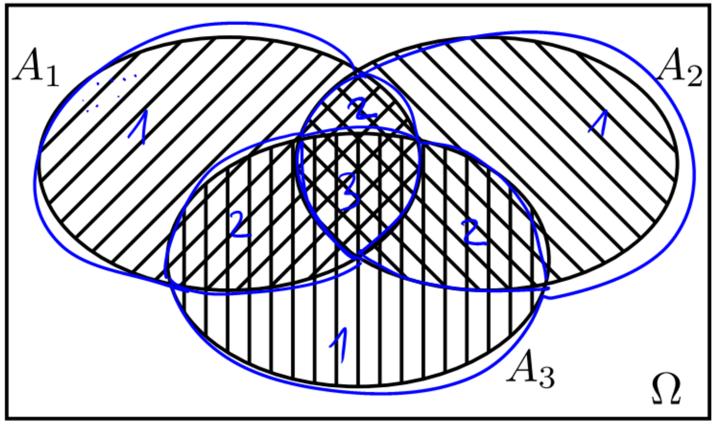
Wegen $A \cup B = C \cup B$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\Pr[A \cup B] &= \Pr[C \cup B] = \Pr[C] + \Pr[B] = \\ &\Pr[A] - \Pr[A \cap B] + \Pr[B]\end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung für $n = 2$ gezeigt.

Beweis (Forts.):

Der Fall $n = 3$:



Man beachte, dass durch die im Satz angegebene Summe jedes Flächenstück insgesamt genau einmal gezählt wird.

1.1 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

Frage: Wie können Wahrscheinlichkeiten sinnvoll festgelegt werden?

Prinzip von Laplace (Pierre Simon Laplace (1749–1827)):
Wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Also:

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Was bedeutet "wenn nichts dagegen spricht"?
So was wie: Nach unserem Kenntnis der Gesetze (physikalische, psychologische, soziologische ...), die das Ergebnis des Experiments bestimmen, wird kein Elementarereignis "bevorzugt".