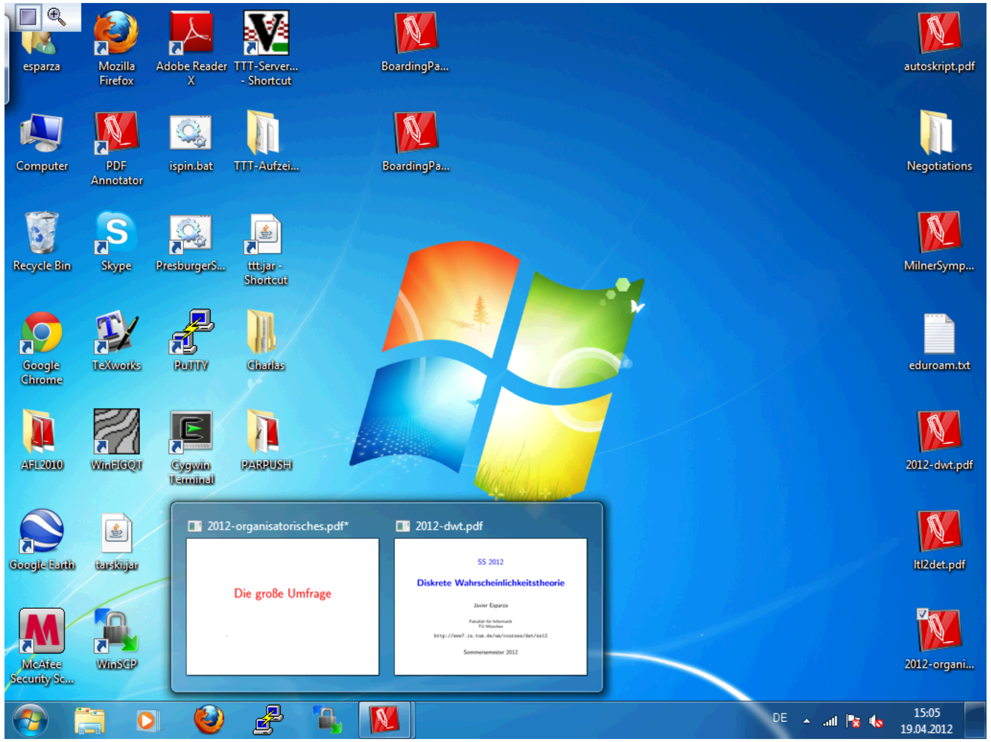
Script **generated by TTT**

Title: Esparza: DWT (19.04.2012)

Date: Thu Apr 19 15:05:19 CEST 2012

Duration: 41:05 min

Pages: 20



2. Literatur

- T. Schickinger, A. Steger:
  Diskrete Strukturen - Band 2,
  Springer Verlag 2001
- N. Henze:
  Stochastik für Einsteiger, 5. Auflage
  Vieweg, 2004
- M. Greiner, G. Tinhofer:
  Stochastik für Informatiker,
  Carl Hanser Verlag, 1996
- H. Gordon:
  Discrete Probability,
  Springer-Verlag, 1997
- R. Motwani, P. Raghavan:
  Randomized Algorithms,
  Cambridge University Press, 1995
- L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz:
  Statistik - Der Weg zur Datenanalyse,
  Springer-Verlag, 1997

Kapitel 0 Einleitung

Was bedeutet Zufall?

- Der Heilige Augustinus über die Zeit:

  Was also ist die Zeit? Wenn niemand mich danach fragt, weiß ich es; wenn ich es jemand auf seine Frage hin erklären will, weiß ich es nicht.

- Pragmatische Sicht: **Zufall** = **mangelndes Wissen**. Bei gewissen Vorgängen wissen wir für eine sichere Vorhersage nicht genug: Ziehung von Lottozahlen, Regenfall über München, Absturz eines informatischen Systems.
- Es können trotzdem probabilistische Vorhersagen gemacht werden.
- Ziel der Vorlesung: lernen, korrekte Vorhersagen dieser Art zu machen und zu identifizieren.

Es wird gewürfelt ... Am Ende der Vorlesung werden Sie in der Lage sein, folgende Fragen zu beantworten:

(1) Ein fairer Würfel wird 10 Mal geworfen. Mit welcher W'keit kriegt man
- keine Sechs? (≈ 0.162)
- genau 1 Mal eine Sechs? (≈ 0.323)
- genau 3 Mal eine Sechs? (≈ 0.155)

(2) Ein fairer Würfel wird 600000 Mal geworfen. Mit welcher W'keit kriegt man mindestens 100100 Sechser? (≈ 0.36)

(3) Drei fairer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher W'keit
- beträgt die Summe der Augenzahlen mindestens 14? ($35/216$)
- ist die größte Augenzahl höchstens 3? ($1/8$)
- sind alle drei Augenzahlen verschieden? ($5/9$)

(4) Sechs faire Würfel werden mit den Zahlen 1 bis 6 nummeriert und dann gleichzeitig geworfen. Wieviele Würfel fallen im Mittel mit der eigenen Nummer als Augenzahl? (1)

(5) Hundert faire Würfel werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher W'keit beträgt die Summe der Augenzahlen höchstens 310? (≈ 0.01)

(6) Drei faire Würfel werden 1000 Mal gleichzeitig geworfen. Mit welcher W'keit kriegt man kein einziges Mal drei Sechser? (≈ 0.01)

(7) 10 faire Würfel werden mit den Zahlen 1 bis 10 numeriert und dann 10000 Mal gleichzeitig geworfen. Das Ergebnis eines Wurfes kann damit als ein Vektor $(a_1, \ldots, a_{10})$ mit $1 \leq a_i \leq 6$ dargestellt werden. Mit welcher W'keit wird sich kein Ergebnis wiederholen? (≈ 0.437)

(4) Sechs faire Würfel werden mit den Zahlen 1 bis 6 nummeriert und dann gleichzeitig geworfen. Wieviele Würfel fallen im Mittel mit der eigenen Nummer als Augenzahl? (1)

(5) Hundert faire Würfel werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher W'keit beträgt die Summe der Augenzahlen höchstens 310? (≈ 0.01)

(6) Drei faire Würfel werden 1000 Mal gleichzeitig geworfen. Mit welcher W'keit kriegt man kein einziges Mal drei Sechser? (≈ 0.01)

(7) 10 faire Würfel werden mit den Zahlen 1 bis 10 numeriert und dann 10000 Mal gleichzeitig geworfen. Das Ergebnis eines Wurfes kann damit als ein Vektor $(a_1, \ldots, a_{10})$ mit $1 \leq a_i \leq 6$ dargestellt werden. Mit welcher W'keit wird sich kein Ergebnis wiederholen? (≈ 0.437)

(8) Wie oft muss man einen fairen Würfel im Mittel werfen, um

- die erste Sechs
- drei Sechser hintereinander
- alle sechs Augenzahlen mindestens einmal

zu kriegen? $(6, 258, 14.7)$

(9) Anna versucht, das Ergebnis eine Reihe von Würfen eines fairen Würfels zu raten. Der Würfel wird 600 Mal geworfen. Wie oft muss Anna das richtige Ergebnis raten, so dass die W'keit, das es aus Zufall geschieht, höchstens 1% beträgt? (121)

(10) Ein Würfel wird 15 Mal geworfen und man bekommt 1 Mal die eins, 3 Mal die 2, 4 Mal die 3, 3 Mal die 4, 4 Mal die 5 und 0 Mal die 6. Mit welcher Konfidenz kann behauptet werden, der Würfel sei nicht fair? (0.95)

Sie können schon heute diese Ergebnisse experimentell bestätigen oder widerlegen!! (wahrscheinlich haben wir uns hier oder da verrechnet ...)

Zufall in der Informatik:

- Hardware-Fehler können durch Zufallsvorgänge (z.B. Strahlung) eintreten.

  Zuverlässigkeitsanalyse

- Download-Zeiten von Web-Seiten, Antwort-Zeiten von Diensten können nicht präzise vorhergesagt werden.

  Leistungsanalyse

- Viele Programme verwenden Zufallsbits, um mit großer Wahrscheinlichkeit gewisse Problemsituationen (z.B. Verklemmungen) zu vermeiden:

  Randomisierte Algorithmen

Thema der Vorlesung: Zufallsexperimente

- Das Experiment wird unter genau festgelegten Versuchsbedingungen durchgeführt.
- Die Menge der moglichen Ergebnisse (Ausgänge) ist vor der Durchführung des Experimentes bekannt.
- Das Experiment kann zumindest prinzipiell beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden.

Mathematische Modellierung von Zufallsexperimenten

Drei faire Würfel werden geworfen. Was ist die W'keit, dass insgesamt über 12 Augenzahlen angezeigt werden?

- Die Menge der möglichen Ausgänge wird aus der Beschreibung gewonnen.
  Ausgänge: $(1, 1, 1), \ldots, (6, 6, 6)$
- Die W'keiten der Ausgänge werden ebenfalls aus der Beschreibung gewonnen.
  $\Pr[(1, 1, 1)] = \ldots = \Pr[(6, 6, 6)] = \frac{1}{216}$
- Die Frage, die uns interessiert, wird auf die Berechnung der W'keit einer Menge von möglichen Ausgängen reduziert.
  $\Pr[\{(5, 4, 4), (4, 5, 5), \ldots, (6, 6, 6)\}]$
- Zwei Fehlerquellen: falsche Modelle und falsche Berechnungen!

- Die Reduktion der Frage auf W'keiten ist nicht immer so direkt.

  Drei faire Würfel werden geworfen. Sollte man folgende Wette eingehen? Wenn insgesamt über 12 Augenzahlen angezeigt werden, gewinnt man 1 Euro. Sonst verliert man 2 Euro.

Kapitel I Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1. Grundlagen

Definition 1

1. Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von Elementarereignissen gegeben.
2. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (Elementar-)Wahrscheinlichkeit $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

3. Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$$

definiert.

Beispiel 2

Zwei faire Würfel werden geworfen. Mit welcher W'keit beträgt die Gesamtzahl der Augen 10?

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \; & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \; \}\end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[(i,j)]$ eines jeden Elementarereignisses (i,j) ist $\frac{1}{36}$.
- Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ des Ereignisses

$$E = \{\text{Die Gesamtzahl der Augen ist } 10\}$$

ist $\frac{1}{12}$.

Wir hätten aber auch folgendermaßen modellieren können:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 10, 11, 12\}$$

Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse muss nun sorgfältig modelliert werden:

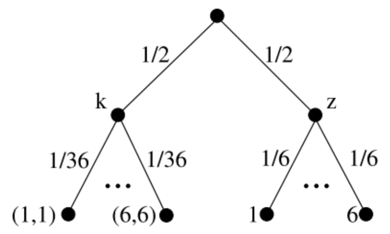
- $\Pr[2] = \frac{1}{36}$
- $\Pr[4] = \frac{1}{12}$
- $\Pr[7] = \frac{1}{6}$

Achtung: $\Pr(n) = \frac{1}{11}$ für alle $n \in \{2, \ldots 12\}$ ist aus mathematischer Sicht zulässig, jedoch ein falsches Modell dieses Problems. Es entspricht nicht dem, was man unter “faire Würfel” versteht!

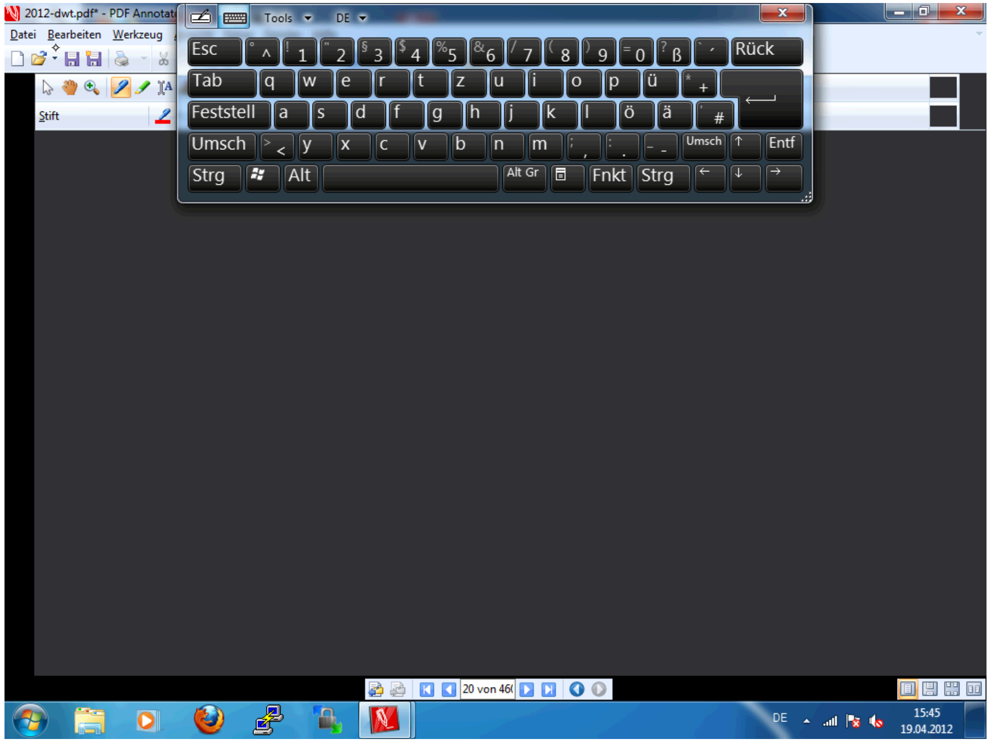
Mehrstufige Experimente:

- Experimente bestehen oft aus Teilexperimenten, die der Reihe nach durchgeführt werden.
- Welches Teilexperiment als nächstes durchgeführt wird, kann vom Ausgang des vorigen Teils abhängen.
- Elementarereignisse = mögliche Sequenzen von “Teilereignissen”.
- Daumenregel: die W'keit eines Elementarereignisses ist das Produkt der W'keiten der Teilereignisse.

Mehrstufige Experimente können als Bäume visualisiert werden. Die Elementarereignisse sind die Pfade des Baumes.



Jeder Knoten repräsentiert ein Ereignis (die Menge der Pfade, die den Knoten besuchen). Frage: Welche W'keit hat dieses Ereignis?


2012-dwt.pdf* - PDF Annotat
Datei Bearbeiten Werkzeug
Stift
Tools
DE
Esc ^ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 ß Rück
Tab q w e r t z u i o p ü +
Feststell a s d f g h j k l ö ä #
Umsch < y x c v b n m , . - Umsch Entf
Strg Alt Alt Gr Fnkt Strg
20 von 46(
DE
15:45
19.04.2012